Operaciones lineales con conjuntos totalmente acotados en espacios normados

Objetivos. Mostrar que en cualquier espacio normado, la suma de dos conjuntos totalmente acotados también es un conjunto totalmente acotado, y el producto por escalar de un conjunto totalmente acotado también es un conjunto totalmente acotado.

Prerrequisitos. Conjunto totalmente acotado, espacio normado, la suma de dos conjuntos en un espacio vectorial, el producto de un conjunto de vectores por un escalar.

1 Proposición. *Si V es un espacio normado y $P, Q \subseteq V$ son conjuntos totalmente acotados, entonces $P + Q$ también es totalmente acotado.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, encontramos una $\varepsilon/2$-red finita R para P y una $\varepsilon/2$-red finita S para Q.

Mostremos que el conjunto $R + S$ es finito. En efecto, $R + S$ es la imagen del conjunto finito $R \times S$ bajo la operación adición.

Otra demostración que $R + S$ es finito. Numeramos los elementos de R y S:

$$R = \{r_1, \ldots, r_m\}, \qquad S = \{s_1, \ldots, s_n\}.$$

Es fácil ver que

$$R + S = \big\{r_j + s_k \colon\ j \in \{1, \ldots, m\},\ k \in \{1, \ldots, n\}\big\}.$$

En particular, el conjunto $R + S$ tiene a lo más $m + n$ elementos y por lo tanto es finito.

Mostremos que $R + S$ es una ε-red para $P + Q$. Sea $v \in P + Q$. Encontramos p en P y q en Q tales que $v = p + q$. Como R es una $\varepsilon/2$-red para P, encontramos x en R tal que $\|x - p\| < \varepsilon/2$. Como S es una $\varepsilon/2$-red para Q, encontramos y en Q tal que $\|y - q\| < \varepsilon/2$. Luego

$$\|(x + y) - v\| = \|(x - p) + (y - q)\| \le \|x - p\| + \|y - q\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

2 Ejercicio. Escriba la última parte de demostración de otra manera, en términos de uniones de bolas.

3 Proposición. *Si V es un espacio normado complejo, P es un conjunto totalmente acotado en V y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces λP es totalmente acotado.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos $\delta := \frac{\varepsilon}{|\lambda|+1}$ y encontramos una δ-red finita R para P. Es fácil ver que λR es finito y λR es una ε-red para P. $\square$