Isometrías lineales entre espacios con producto interno

Objetivos. Estudiar varias caracterizaciones (descripciones equivalentes) de isometrías entre espacios con producto interno.

Prerrequisitos. Transformaciones lineales acotadas, isometrías entre espacios métricos, isometrías entre espacios normados.

1 Definición (isometrías entre espacios métricos, repaso)**.** Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos y sea $f\colon X \to Y$. Se dice que f es una *isometría*, si

$$\forall a, b \in X \qquad d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b).$$

2 Proposición (repaso: criterio de isometrías lineales entre espacios normados)**.** *Sean V_1, V_2 espacios normados complejos y sea $S\colon V_1 \to V_2$ una transformación lineal. Entonces las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:*

(a) S preserva la norma, esto es, $\|Sa\|_{V_2} = \|a\|_{V_1}$ para cada a en V_1;

(b) S es una isometría, esto es, $d_{V_2}(Sa, Sb) = d_{V_1}(a, b)$ para cada a, b en V_1.

Si estas condiciones se cumplen, entonces $S \in \mathcal{B}(V_1, V_2)$. Más aún, si $V_1 \neq \{0_{V_1}\}$, entonces $\|S\| = 1$.

Demostración. Supongamos que se cumple (a) y demostremos que se cumple (b). Para cada a, b en V_1,

$$d_{V_2}(Sa, Sb) = \|Sa - Sb\|_{V_2} = \|S(a - b)\|_{V_2} = \|a - b\|_{V_1} = d_{V_1}(a, b).$$

Supongamos que se cumple (b) y demostremos que se cumple (a). Para cada a en V_1,

$$\|Sa\|_{V_2} = d_{V_2}(Sa, 0_{V_2}) = d_{V_2}(Sa, S0_{V_1}) = d_{V_1}(a, 0_{V_1}) = \|a\|_{V_1}.$$

Finalmente, si se cumple (a), entonces

$$\|S\| = \sup_{a \in V_1 \setminus \{0_{V_1}\}} \frac{\|Sa\|_{V_2}}{\|a\|_{V_1}} = \sup_{a \in V_1 \setminus \{0_{V_1}\}} 1 = 1. \qquad \square$$

3 Ejercicio. Sean V_1, V_2 espacios normados complejos y sea $S\colon V_1 \to V_2$ una transformación lineal. Demostrar que S es isométrica si, y sólo si,

$$\forall u \in V_1 \qquad \Big(\|u\|_{V_1} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \|Su\|_{V_2} = 1 \Big).$$

4 Proposición (criterio de isometrías entre espacios con producto interno)**.** *Sean H_1, H_2 espacios vectoriales complejos con producto interno y sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) S preserva la distancia:

$$\forall x, y \in H_1 \qquad d_{H_2}(Sx, Sy) = d_{H_1}(x, y).$$

(b) S preserva la norma:

$$\forall u \in H_1 \qquad \|Su\|_{H_2} = \|u\|_{H_1}.$$

(c) S preserva el producto interno:

$$\forall x, y \in H_1 \qquad \langle Sx, Sy\rangle_{H_2} = \langle x, y\rangle_{H_1}.$$

Demostración. Por la Proposición 2, ya sabemos que las condiciones (a) y (b) son equivalentes.

Supongamos (c) y demostremos (b). Para cada u en H_1,

$$\|Su\|_{H_2}^2 = \langle Su, Su\rangle_{H_2} = \langle u, u\rangle_{H_1} = \|u\|_{H_1}^2.$$

Supongamos (b) y demostremos (c). Sean $x, y \in H_1$. Usamos la identidad de polarización.

$$\begin{aligned} \langle Sx, Sy\rangle_{H_2} &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \|Sx + \mathrm{i}^k\, Sy\|_{H_2}^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \|S(x + \mathrm{i}^k\, y)\|_{H_2}^2 \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \|x + \mathrm{i}^k\, y\|_{H_1}^2 = \langle x, y\rangle_{H_1}. \end{aligned}$$

□

5 Ejercicio. Sean H_1, H_2 espacios vectoriales complejos con producto interno, y sea $S\colon H_1 \to H_2$ una transformación lineal. Demostrar que S es una isometría si, y sólo si, para cada m en $\mathbb{N}$ y cada lista ortonormal $(u_1, \ldots, u_m)$ en H_1, la lista $(Su_1, \ldots, Su_m)$ es ortonormal en H_2.

6 Problema (isometrías lineales y ortogonalidad)**.** Sean H_1, H_2 espacios vectoriales complejos con producto interno y sea $S\colon H_1 \to H_2$ una transformación lineal no nula. Determinar si las siguientes dos condiciones son equivalentes.

(a) existe γ en $\mathbb{C}$ tal que γS es una isometría;

(b) para cada par de vectores a, b en H_1, si $a \perp b$, entonces $Sa \perp Sb$.