Isometrías lineales entre espacios de Hilbert

Objetivos. Estudiar varias caracterizaciones (descripciones equivalentes) de isometrías entre espacios de Hilbert.

Prerrequisitos. El operador adjunto de un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert, la correspondencia entre los operadores, sus formas sesquilineales y sus formas cuadráticas, isometrías entre espacios métricos.

1 Definición (isometrías entre espacios métricos, repaso)**.** Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos y sea $f\colon X \to Y$. Se dice que f es una *isometría*, si

$$\forall a, b \in X \qquad d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b).$$

2 Proposición (repaso: criterio de isometrías lineales entre espacios normados)**.** *Sean V_1, V_2 espacios normados complejos y sea $S\colon V_1 \to V_2$ una transformación lineal. Entonces las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:*

(a) S preserva la norma, esto es, $\|Sa\|_{V_2} = \|a\|_{V_1}$ para cada a en V_1;

(b) S es una isometría, esto es, $d_{V_2}(Sa, Sb) = d_{V_1}(a, b)$ para cada a, b en V_1.

Más aún, si estas condiciones se cumplen, entonces $S \in \mathcal{B}(V_1, V_2)$ y $\|S\| = 1$.

Si H es un espacio vectorial complejo con producto interno y $T \in \mathcal{B}(H)$, denotamos por f_T la forma sesquilineal asociada a T y por q_T la forma cuadrática asociada a T:

$$f_T(x, y) \coloneqq \langle Tx, y\rangle, \qquad q_T(x) \coloneqq f_T(x, x).$$

3 Proposición (repaso: la correspondencia entre los operadores lineales acotados, sus formas sesquilineas asociadas y sus formas cuadráticas asociadas es inyectiva)**.** *Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $T, U \in \mathcal{B}(H)$. Entonces*

$$T = U \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_T = f_U \qquad \Longleftrightarrow \qquad q_T = q_U.$$

Recordemos que la implicación $q_T = q_U \;\Rightarrow\; f_T = f_U$ en la Proposición 3 se sigue de la identidad de polarización para las formas sesquilineales.

4 Proposición (criterio de isometrías en un espacio de Hilbert)**.** *Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert complejos y sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $S^*S = I_{H_1}$.

(b) S preserva el producto interno:

$$\forall x, y \in H_1 \qquad \langle Sx, Sy\rangle_{H_2} = \langle x, y\rangle_{H_1}.$$

(c) S preserva la norma:

$$\forall u \in H_1 \qquad \|Su\|_{H_2} = \|u\|_{H_1}.$$

(d) S preserva la distancia:

$$\forall x, y \in H_1 \qquad d_{H_2}(Sx, Sy) = d_{H_1}(x, y).$$

Demostración. Por la Proposición 2, ya sabemos que las condiciones (c) y (d) son equivalentes.

Notamos que los productos internos en la condición (b) se pueden escribir en términos de las formas sesquilineales asociadas a los operadores S^*S e I_{H_1}:

$$\begin{aligned} \langle Sx, Sy\rangle_{H_2} &= \langle S^*Sx, y\rangle_{H_1} = f_{S^*S}(x, y), \\ \langle x, y\rangle_{H_1} &= \langle I_{H_1}x, y\rangle_{H_1} = f_{I_{H_1}}(x, y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la condición (b) es equivalente a la condición $f_{S^*S} = f_{I_{H_1}}$.

Ahora notamos que la igualdad en la condición (c) es equivalente a la igualdad $\|Su\|_{H_2}^2 = \|u\|_{H_1}^2$, y estos cuadrados de las normas se escriben en términos de las formas cuadráticas asociadas a los operadores S^*S e I_{H_1}:

$$\begin{aligned} \|Su\|_{H_2}^2 &= \langle Su, Su\rangle_{H_2} = f_{S^*S}(u, u) = q_{S^*S}(u), \\ \|u\|_{H_1}^2 &= \langle u, u\rangle_{H_1} = f_{I_{H_1}}(u, u) = q_{I_{H_1}}(u). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la condición (c) es equivalente a la condición $q_{S^*S} = q_{I_{H_1}}$.

Ahora la equivalencia entre (a), (b), (c) se sigue de la Proposición 3. $\square$

5 Ejercicio. Demostrar la implicación (c)$\Rightarrow$(b) en la Proposición 4 de otra manera, usando la identidad de polarización para el producto interno.

6 Ejercicio. Sean V_1, V_2 espacios normados complejos y sea $S\colon V_1 \to V2_2$ una transformación lineal. Demostrar S es isométrico si, y sólo si,

$$\forall u \in V_1 \qquad \Big(\|u\|_{V_1} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \|Su\|_{V_2} = 1 \Big).$$

7 Ejercicio. Sean H_1, H_2 espacios vectoriales complejos con producto interno, y sea $S\colon H_1 \to H_2$ una transformación lineal. Demostrar que S es una isometría si, y sólo si, para cada m en $\mathbb{N}$ y cada lista ortonormal $(u_1, \ldots, u_m)$ en H_1, la lista $(Su_1, \ldots, Su_m)$ es ortonormal en H_2.

8 Problema (isometrías lineales y ortogonalidad)**.** Sean H_1, H_2 espacios vectoriales complejos con producto interno y sea $S\colon H_1 \to H_2$ una transformación lineal no nula. Determinar si las siguientes dos condiciones son equivalentes.

(a) existe γ en $\mathbb{C}$ tal que γS es una isometría;

(b) para cada par de vectores a, b en H_1, si $a \perp b$, entonces $Sa \perp Sb$.