El límite superior y el límite inferior de una sucesión

Objetivos. Definir las nociones de los límites superior e inferior de una sucesión y ver un par de ejemplos.

Requisitos. Supremo e ínfimo de un conjunto. Trabajo con desigualdades, supremos e ínfimos.

1 Proposición (sobre el límite de una sucesión creciente, repaso)**.** *Sea* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión creciente en* $\overline{\mathbb{R}}$*, esto es,* $a_n \le a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

2 Proposición (sobre el límite de una sucesión decreciente, repaso)**.** *Sea* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión decreciente en* $\overline{\mathbb{R}}$*, esto es,* $a_n \ge a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Para cada k en $\mathbb{N}$, la k-ésima cola de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se define como el conjunto $\{x_n\colon\ n \ge k\}$. En otras palabras, este conjunto es la imagen del conjunto $\{n \in \mathbb{N}\colon\ n \ge k\}$ bajo la función x:

$$\{x_n\colon\ n \ge k\} = x\big[\{n \in \mathbb{N}\colon\ n \ge k\}\big] = \{v \in \overline{\mathbb{R}}\colon\quad \exists n \ge k \quad v = x_n\}.$$

Para el supremo y el ínfimo de este conjunto usamos la siguiente notación breve:

$$\sup_{n\ge k} x_n = \sup\{x_n\colon\ n \ge k\}, \qquad \inf_{n\ge k} x_n = \inf\{x_n\colon\ n \ge k\}.$$

3 Proposición (sobre la sucesión de los supremos de las colas de una sucesión)**.** *Sea* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\overline{\mathbb{R}}$*. Definimos una sucesión* $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *mediante la regla*

$$a_k \coloneqq \sup_{n\ge k} x_n.$$

Entonces la sucesión a *es decreciente.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\{n \in \mathbb{N}\colon\ n \ge k+1\} \subseteq \{n \in \mathbb{N}\colon\ n \ge k\}$. Por la propiedad creciente de las imágenes,

$$x\big[\{n \in \mathbb{N}\colon\ n \ge k+1\}\big] \subseteq x\big[\{n \in \mathbb{N}\colon\ n \ge k\}\big].$$

En la notación breve,

$$\{x_n\colon\ n \ge k+1\} \subseteq \{x_n\colon\ n \ge k\}.$$

Por la propiedad creciente del supremo, $a_{k+1} \le a_k$. $\square$

4 Definición (el límite superior de una sucesión)**.** Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Su *límite superior* se define mediante la siguiente fórmula:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \coloneqq \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} x_n.$$

5 Proposición. *Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} x_n. \tag{1}$$

Demostración. Se sigue de la Proposición 2 aplicada a la sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, donde $a_k \coloneqq \sup_{n\geq k} x_k$. □

6 Definición. Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Su *límite inferior* se define mediante la siguiente fórmula:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \coloneqq \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} x_n. \tag{2}$$

7 Ejercicio. Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Demostrar que su límite inferior se puede escribir como "el límite de ínfimos de colas":

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} x_n. \tag{3}$$

8 Proposición (comparación del límite superior con el límite inferior)**.** *Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n. \tag{4}$$

Demostración. Para cada k en $\mathbb{N}$, pongamos

$$a_k \coloneqq \sup_{n\geq k} x_k, \qquad b_k \coloneqq \inf_{n\geq k} x_k.$$

El conjunto $Y_k \coloneqq \{x_n\colon\ n \geq k\}$ es no vacío; por ejemplo, uno de sus elementos es x_k. Por eso el ínfimo de este conjunto es menor o igual que su supremo:

$$b_k = \inf(Y_k) \leq x_k \leq \sup(Y_k) \leq a_k.$$

Como $b_k \leq a_k$ para cada k en $\mathbb{N}$, y ambas sucesiones tienen límites, la misma desigualdad se cumple para sus límites:

$$\liminf_{n\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} b_k \leq \lim_{k\to\infty} a_k = \limsup_{n\to\infty} x_k.$$ □

9 Ejemplo. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida mediante la siguiente regla:

$$x_n \coloneqq (-1)^n \left(3 + \frac{1}{n}\right).$$

Calculemos los primeros elementos de esta sucesión:

$$x_1 = -4, \quad x_2 = \frac{7}{2}, \quad x_3 = -\frac{10}{3}, \quad x_4 = \frac{13}{4}, \quad x_5 = -\frac{16}{5}, \quad x_6 = \frac{19}{6}.$$

Pongamos

$$Y_k \coloneqq \{x_n\colon\ n \ge k\}.$$

Consideremos por separado los elementos con índices impares y las colas de las sucesión correspondiente:

$$q_n \coloneqq x_{2n-1} = -\left(3 + \frac{1}{2n-1}\right), \qquad Q_k \coloneqq \{q_n\colon\ n \ge k\}.$$

También consideremos los elementos con índices pares y las colas de la sucesión correspondiente:

$$p_n \coloneqq x_{2n} = 3 + \frac{1}{2n}, \qquad P_k \coloneqq \{p_n\colon\ n \ge k\}.$$

Como la sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y la sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, los supremos e ínfimos de sus colas se calculan fácilmente:

$$\sup(Q_k) = \lim_{n\to\infty} q_n = -3, \qquad \inf(Q_k) = q_k = -\left(3 + \frac{1}{2k-1}\right),$$

$$\sup(P_k) = p_k = 3 + \frac{1}{2k}, \qquad \inf(P_k) = \lim_{n\to\infty} p_n = 3.$$

Las colas de la sucesión original se expresan a través los conjuntos P_k y Q_k

$$Y_{2m-1} = \{x_{2m-1}, x_{2m}, x_{2m+1}, \ldots\} = Q_m \cup P_m, \tag{5}$$

$$Y_{2m} = \{x_{2m}, x_{2m+1}, \ldots\} = Q_{m+1} \cup P_m. \tag{6}$$

Dejamos como un ejercicio la demostración formal de (5) y (6). Finalmente, notemos que Ahora es fácil calcular el supremo y el ínfimo de Y_k:

$$a_k \coloneqq \sup(Y_k) = \begin{cases} \max\{\sup(Q_m), \sup(P_m)\}, & k = 2m-1; \\ \max\{\sup(Q_{m+1}), \sup(P_m)\}, & k = 2m \end{cases} = \begin{cases} 3 + \frac{1}{2m}, & k = 2m-1; \\ 3 + \frac{1}{2m}, & k = 2m. \end{cases}$$

Notemos que en ambos casos $m = \lfloor (k+1)/2 \rfloor$, así que

$$a_k = 3 + \frac{1}{2\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Por eso

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} a_k = 3.$$

De manera similar, poniendo $b_k := \inf(Y_k)$, obtenemos

$$b_k = \begin{cases} -\left(3 + \frac{1}{2m-1}\right), & k = 2m-1; \\ -\left(3 + \frac{1}{2m+1}\right), & k = 2m, \end{cases}$$

and

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} b_k = -3.$$

10 Problema. Sean $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\overline{\mathbb{R}}$ que tienen límites en $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = u, \qquad \lim_{n\to\infty} q_n = v.$$

Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida como

$$x_n := \begin{cases} q_m, & n = 2m-1, \\ p_m, & n = 2m. \end{cases}$$

De manera menos formal,

$$x_n = (q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3, \ldots).$$

Demostrar que

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \max\{u, v\}, \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n = \min\{u, v\}.$$