Límites de sucesiones monótonas

Objetivos. Relacionar el límite de la sucesión monótona con su supremo o ínfimo.

Requisitos. Supremo e ínfimo de un conjunto. Trabajo con desigualdades, supremos e ínfimos.

1. Notación. Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $I \subset \mathbb{N}$ un conjunto de índices. Entonces en vez de $\sup\{a_n \colon n \in I\}$ se escribe $\sup\limits_{n\in I} a_n$.

2. Proposición. Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en $\overline{\mathbb{R}}$, esto es, $a_n \le a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Demostración. Denotemos $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ por b. Consideremos tres casos: $b = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ y $b = +\infty$.

1. Sea $b = -\infty$. Entonces $a_n = -\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como se sabe, el límite de una sucesión constante es igual a su (único) valor.

2. Sea $b \in \mathbb{R}$ y sea U una vecindad de b. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \subset U$. El número $b - \varepsilon$ no es cota superior del conjunto $\{a_n \colon\ n \in \mathbb{N}\}$ y por lo tanto existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_k > b - \varepsilon$. Como la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, para cualquier $n \ge k$ obtenemos $a_n \ge a_k > b - \varepsilon$. Por otro lado, $a_n \le b < b + \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hemos demostrado que $a_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ y por lo tanto $a_n \in U$ para todo $n \ge k$.

3. Sea $b = +\infty$ y sea U una vecindad de b. Entonces existe un $E > 0$ tal que $(E, +\infty] \subset U$. El número E no es cota superior del conjunto $\{a_n \colon\ n \in \mathbb{N}\}$, por lo tanto existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_k > E$. Como la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, para cualquier $n \ge k$ obtenemos $a_n \ge a_k > E$. Por otro lado, $a_n \le +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hemos demostrado que $a_n \in (E, +\infty]$ y por lo tanto $a_n \in U$ para todo $n \ge k$. $\square$

3. Ejercicio. Enunciar y demostrar un resultado similar para sucesiones decrecientes.