Núcleos

Objetivos. Definir el concepto de *núcleos*, conocidos también como *funciones positivamente definidas en el sentido no estricto*. Demostrar el criterio en términos de determinantes (el criterio de Sylvester para núcleos), la propiedad hermítica y la desigualdad de Schwarz para núcleos.

Prerrequisitos. Matrices positivas, el criterio de Sylvester para matrices positivas.

1 Definición (núcleo)**.** Sea X un conjunto. Una función $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$ se llama *núcleo* si para cada m, cualesquiera $x_1, \ldots, x_m$ en X y cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ en $\mathbb{C}$,

$$\sum_{r,s=1}^{m} \overline{\lambda_r}\, \lambda_s\, K(x_r, x_s) \geq 0.$$

Identificamos la función K de clase $\mathbb{C}^{X^2}$ con la familia de funciones $(K_x)_{x\in X}$ de clase $\mathbb{C}^X$, poniendo

$$K_x(y) \coloneqq K(y, x).$$

Consideramos el conjunto de funciones $\mathbb{C}^X$ como espacio vectorial complejo, con operaciones naturales (punto a punto).

2 Definición. Sean $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$. Denotamos por $G_K(x_1, \ldots, x_m)$ la siguiente matriz:

$$G_K(x_1, \ldots, x_m) \coloneqq \big[K(x_r, x_s)\big]_{r,s=1}^{m} = \big[K_{x_s}(x_r)\big]_{r,s=1}^{m}.$$

La matriz $G_K(x_1, \ldots, x_m)$ se conoce como la matriz de Gram asociada a la función K y los puntos $x_1, \ldots, x_m$. Estas matrices aparecen en trabajos de Mercer, Moore, y otros matemáticos.

3 Proposición (criterio de núcleo en términos de matrices positivas)**.** *Sea $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) K es un núcleo;

(b) para cada m en $\mathbb{N}$ y cada $x_1, \ldots, x_m$ en X, $\quad G_K(x_1, \ldots, x_m) \geq 0.$

Demostración. Dados m en $\mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_m$, consideremos la forma cuadrática $q\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ la forma cuadrática q asociada a la matriz $G_K(x_1, \ldots, x_m)$:

$$q(\lambda) \coloneqq \langle G_K(x_1, \ldots, x_m)\lambda, \lambda\rangle = \lambda^* G_K(x_1, \ldots, x_m)\lambda.$$

En términos de las componentes de λ,

$$\begin{aligned} q(\lambda) &= \sum_{r=1}^{m} \overline{\lambda_r}\,\big(G_K(x_1, \ldots, x_m)\,\lambda\big)_r = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} \overline{\lambda_r}\lambda_s (G_K(x_1, \ldots, x_m))_{r,s} \\ &= \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} \overline{\lambda_r}\lambda_s K(x_r, x_s). \end{aligned}$$

La última suma doble coincide con la expresión escrita en la Definición 1. La condición $q \geq 0$ significa que $G_K(x_1, \ldots, x_m) \geq 0$. □

4 Proposición (criterio de Sylvester para núcleos)**.** *Sean $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) K es un núcleo;

(b) para cada m en $\mathbb{N}$ y cada $x_1, \ldots, x_m$ en X,

$$\det(G_K(x_1, \ldots, x_m)) \geq 0.$$

Demostración. Sea K un núcleo y sean $x_1, \ldots, x_m \in X$. Entonces $G_K(x_1, \ldots, x_m) \geq 0$. Por el criterio de Sylvester, esto implica que $\det(G_K(x_1, \ldots, x_m)) \geq 0$.

Supongamos que se cumple la condición (b). Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$. Pongamos $A \coloneqq G_K(x_1, \ldots, x_m)$. Tenemos que trabajar con sus "menores principales" en el sentido general. Dado un subconjunto $J = \{j_1, \ldots, j_p\}$ de $\{1, \ldots, m\}$, consideramos la submatriz de la matriz A ubicada en los renglones y las columnas del conjunto J:

$$A_J^J \coloneqq \big[A_{j_r, j_s}\big]_{r,s=1}^{p}.$$

Observamos que

$$A_J^J = \big[K(x_{j_r}, x_{j_s})\big]_{r,s=1}^{p} = G_K(x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}).$$

Aplicamos la condición (b) con los puntos $x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}$ y concluimos que $\det(A_J^J) \geq 0$. El subconjunto J de $\{1, \ldots, m\}$ es general. Debido al criterio de Sylvester, hemos demostrado que $A \geq 0$. □

5 Proposición (la propiedad hermítica para núcleos)**.** *Sea $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$ un núcleo. Entonces para cada x, y en X se tiene*

$$K(y, x) = \overline{K(x, y)}.$$

Demostración. Consideremos la matriz

$$G_K(x,y) = \begin{bmatrix} K(x,x) & K(x,y) \\ K(y,x) & K(y,y) \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Por la Proposición 3, la matriz $G_K(x,y)$ es positiva. Luego, del criterio de matrices positivas, se sigue que $G_K(x,y)$ es autoadjunta. Por lo tanto, $K(y,x) = \overline{K(x,y)}$. □

6 Proposición (la desigualdad de Schwarz para los núcleos). *Sea $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$ un núcleo y sean $x, y \in X$. Entonces*

$$|K(x,y)|^2 \leq K(x,x)K(y,y). \tag{2}$$

Demostración. Igual que en la demostración de la Proposición 5, consideremos la matriz (1). Por la Proposición 4, tenemos que $\det(G_K(x,y)) \geq 0$, esto es,

$$K(x,x)K(y,y) - |K(x,y)|^2 \geq 0.$$ □

Segunda demostración. Se puede razonar similar a la demostración de la desigualdad de Schwarz para los semi-productos internos, aplicando la definición del núcleo con escalares λ_1, λ_2 apropiados. □

En el caso real no hay análogo de la Proposición 5, y hay que pedir de manera explícita la propiedad simétrica en la definición del núcleo.

Una función $K\colon X^2 \to \mathbb{R}$ se llama *simétrica*, si para cada x, y en X se cumple la igualdad $K(y,x) = K(x,y)$.

7 Definición (núcleo real). Sea X un conjunto. Una función $K\colon X^2 \to \mathbb{R}$ se llama *núcleo real* si K es simétrica y para cada m, cualesquiera $x_1, \ldots, x_m$ en X y cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ en $\mathbb{R}$,

$$\sum_{r,s=1}^{m} \lambda_r \, \lambda_s \, K(x_r, x_s) \geq 0.$$

Para los núcleos reales se tienen análogos de las Proposiciones 3, 4 y 6, pero en todos lados hay que suponer desde el principio que K sea simétrica.