Núcleo (definición)

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

22 de septiembre de 2022

Plan

Contenido

Objetivos

Definir el concepto de núcleo.

Objetivos

Definir el concepto de núcleo.

Caracterizar los núcleos en términos de matrices positivas.

Objetivos

Definir el concepto de núcleo.

Caracterizar los núcleos en términos de matrices positivas.

Demostrar sus propiedades elementales:

- la propiedad hermítica,
- la desigualdad de Schwarz.

Prerrequisitos

- Matrices positivas.
- Determinantes de matrices positivas y de sus submatrices principales.

Plan

La forma cuadrática asociada a una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. Definimos $q_A \colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$,

$$q_A(\xi) := \langle A\xi, \xi \rangle.$$

La forma cuadrática asociada a una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. Definimos $q_A \colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$,

$$q_A(\xi) := \langle A\xi, \xi \rangle.$$

De manera equivalente,

$$q_A(\xi) = \xi^* A \xi.$$

La forma cuadrática asociada a una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. Definimos $q_A\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$,

$$q_A(\xi) := \langle A\xi, \xi \rangle.$$

De manera equivalente,

$$q_A(\xi) = \xi^* A\, \xi.$$

En términos de las componentes de A y ξ,

$$q_A(\xi) = \sum_{r=1}^{m} (A\xi)_r\, \overline{\xi_r} = \sum_{r=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{m} A_{r,s}\xi_s \right) \overline{\xi_r} = \sum_{r,s=1}^{m} A_{r,s}\, \overline{\xi_r}\, \xi_s.$$

Formas cuadráticas positivas

Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. Decimos que q_A es positiva, si

$$\forall \xi \in \mathbb{C}^m \qquad q_A(\xi) \geq 0.$$

Notación: $q_A \geq 0$.

Repaso: criterio de matriz positiva

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) existe B en $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$;

(b) $A^* = A$ y $\operatorname{sp}(A) \subseteq [0, +\infty)$;

(c) $q_A(\xi) \geq 0$ para cada ξ en $\mathbb{C}^m$.

Repaso: criterio de matriz positiva

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) existe B en $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$;

(b) $A^* = A$ y $\operatorname{sp}(A) \subseteq [0, +\infty)$;

(c) $q_A(\xi) \geq 0$ para cada ξ en $\mathbb{C}^m$.

Usamos la notación $A \geq 0$, cuando se cumplen estas condiciones.

Repaso: determinantes de matrices positivas

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ tal que $A \geq 0$. Entonces

$$\det(A) \geq 0.$$

Repaso: determinantes de matrices positivas

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ tal que $A \geq 0$. Entonces

$$\det(A) \geq 0.$$

Una demostración: expresar $\det(A)$ como el producto de los valores propios de A.

Plan

Definición

Sea X un conjunto. Una función $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$ se llama núcleo si para cada m, cualesquiera $a_1, \ldots, a_m$ en X y cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ en $\mathbb{C}$,

$$\sum_{r,s=1}^{m} \overline{\lambda_r}\, \lambda_s\, K(a_r, a_s) \geq 0.$$

Funciones de dos argumentos $\approx$ familias de funciones de un argumento

Dada una función K de clase $\mathbb{C}^{X^2}$,
la identificamos con la familia de funciones $(K_x)_{x\in X}$ de clase $\mathbb{C}^X$, poniendo

$$K_x(y) := K(y, x).$$

La matriz de Gram asociada a una función de dos argumentos y una lista de puntos

Definición

Sean $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in X$.

$$G_K(a_1, \ldots, a_m) := \big[K(a_r, a_s)\big]_{r,s=1}^{m} = \big[K_{a_s}(a_r)\big]_{r,s=1}^{m}.$$

La matriz de Gram asociada a una función de dos argumentos y una lista de puntos

Definición

Sean $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in X$.

$$G_K(a_1, \ldots, a_m) := \big[K(a_r, a_s)\big]_{r,s=1}^{m} = \big[K_{a_s}(a_r)\big]_{r,s=1}^{m}.$$

Matrices de esta forma aparecen en trabajos de Mercer, Moore, y otros matemáticos.

Criterio de núcleo en términos de matrices positivas

Proposición

Sea $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) K es un núcleo;

(b) para cada m en $\mathbb{N}$ y cada $a_1, \ldots, a_m$ en X,

$$G_K(a_1, \ldots, a_m) \geq 0.$$

Demostración

Sean $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in X$.

Demostración

Sean $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in X$. Pongamos $A := G_K(a_1, \ldots, a_m)$.

Demostración

Sean $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in X$. Pongamos $A := G_K(a_1, \ldots, a_m)$. Entonces

$$q_A(\lambda) = \langle G_K(x_1, \ldots, x_m)\lambda, \lambda \rangle = \lambda^* \, G_K(x_1, \ldots, x_m) \, \lambda.$$

Demostración

Sean $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in X$. Pongamos $A := G_K(a_1, \ldots, a_m)$. Entonces

$$q_A(\lambda) = \langle G_K(x_1, \ldots, x_m)\lambda, \lambda \rangle = \lambda^* \, G_K(x_1, \ldots, x_m) \, \lambda.$$

En términos de las componentes de λ,

$$q_A(\lambda) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \overline{\lambda_r} \lambda_s (G_K(x_1, \ldots, x_m))_{r,s} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \overline{\lambda_r} \lambda_s K(x_r, x_s).$$

Demostración

Sean $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in X$. Pongamos $A := G_K(a_1, \ldots, a_m)$. Entonces

$$q_A(\lambda) = \langle G_K(x_1, \ldots, x_m)\lambda, \lambda\rangle = \lambda^* \, G_K(x_1, \ldots, x_m) \, \lambda.$$

En términos de las componentes de λ,

$$q_A(\lambda) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \overline{\lambda_r} \lambda_s (G_K(x_1, \ldots, x_m))_{r,s} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \overline{\lambda_r} \lambda_s K(x_r, x_s).$$

La última suma doble coincide con la expresión en la definición del núcleo.

Demostración

Sean $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in X$. Pongamos $A := G_K(a_1, \ldots, a_m)$. Entonces

$$q_A(\lambda) = \langle G_K(x_1, \ldots, x_m)\lambda, \lambda\rangle = \lambda^* \, G_K(x_1, \ldots, x_m) \, \lambda.$$

En términos de las componentes de λ,

$$q_A(\lambda) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \overline{\lambda_r} \lambda_s (G_K(x_1, \ldots, x_m))_{r,s} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \overline{\lambda_r} \lambda_s K(x_r, x_s).$$

La última suma doble coincide con la expresión en la definición del núcleo.

Sabemos que $\quad q_A \geq 0 \quad \iff \quad G_K(x_1, \ldots, x_m) \geq 0.$

Plan

La propiedad hermítica de núcleos complejos

Proposición

Sea $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$ un núcleo. Entonces para cada a, b en X se tiene

$$K(b, a) = \overline{K(a, b)}.$$

Demostración

Sean $a, b \in X$. Consideremos la matriz

$$G_K(a,b) = \begin{bmatrix} K(a,a) & K(a,b) \\ K(b,a) & K(b,b) \end{bmatrix}.$$

Demostración

Sean $a, b \in X$. Consideremos la matriz

$$G_K(a, b) = \begin{bmatrix} K(a, a) & K(a, b) \\ K(b, a) & K(b, b) \end{bmatrix}.$$

Por el criterio de núcleos, $\quad G_K(a, b) \geq 0$.

Demostración

Sean $a, b \in X$. Consideremos la matriz

$$G_K(a, b) = \begin{bmatrix} K(a, a) & K(a, b) \\ K(b, a) & K(b, b) \end{bmatrix}.$$

Por el criterio de núcleos, $\quad G_K(a, b) \geq 0.$

Luego, por el criterio de matrices positivas, $G_K(a, b)$ es autoadjunta.

Demostración

Sean $a, b \in X$. Consideremos la matriz

$$G_K(a,b) = \begin{bmatrix} K(a,a) & K(a,b) \\ K(b,a) & K(b,b) \end{bmatrix}.$$

Por el criterio de núcleos, $\quad G_K(a,b) \geq 0$.

Luego, por el criterio de matrices positivas, $G_K(a,b)$ es autoadjunta.

Por lo tanto, $K(b,a) = \overline{K(a,b)}$.

Determinantes de las matrices de Gram asociadas al núcleo

Proposición

Sean $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$ un núcleo.

Entonces para cada m en $\mathbb{N}$ y cada $a_1, \ldots, a_m$ en X,

$$\det(G_K(a_1, \ldots, a_m)) \geq 0.$$

Determinantes de las matrices de Gram asociadas al núcleo

Proposición

Sean $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$ un núcleo.

Entonces para cada m en $\mathbb{N}$ y cada $a_1, \ldots, a_m$ en X,

$$\det(G_K(a_1, \ldots, a_m)) \geq 0.$$

Demostración: se sigue de la propiedad $G_K(a_1, \ldots, a_m) \geq 0$.

La propiedad positiva

Proposición

Sea $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$ un núcleo. Entonces para cada a en X,

$$K(a, a) \geq 0.$$

Primera demostración. Aplicamos la definición con $m = 1$, $x_1 = a$, $\lambda_1 = 1$:

$$0 \leq \sum_{p,q=1}^{1} \lambda_p \lambda_q K(x_p, x_q) = 1\,1\,K(a, a).$$

Primera demostración. Aplicamos la definición con $m = 1$, $x_1 = a$, $\lambda_1 = 1$:

$$0 \le \sum_{p,q=1}^{1} \lambda_p \lambda_q K(x_p, x_q) = 1\,1\,K(a, a).$$

Segunda demostración. Para $m = 1$ y $x_1 = a$ consideramos la matriz G_K:

$$G_K(a) = \big[K(a, a)\big].$$

Como $G_K(a) \ge 0$, tenemos $0 \le \det G_K(a) = K(a, a)$.

La desigualdad de Schwarz para núcleos

Proposición

Sea $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$ un núcleo y sean $a, b \in X$. Entonces

$$|K(a,b)|^2 \leq K(a,a)K(b,b).$$

Demostración

Consideremos la matriz

$$G_K(a,b) = \begin{bmatrix} K(a,a) & K(a,b) \\ K(b,a) & K(b,b) \end{bmatrix}.$$

Demostración

Consideremos la matriz

$$G_K(a, b) = \begin{bmatrix} K(a, a) & K(a, b) \\ K(b, a) & K(b, b) \end{bmatrix}.$$

Por el criterio de núcleos, $\quad G_K(a, b) \geq 0.$

Demostración

Consideremos la matriz

$$G_K(a,b) = \begin{bmatrix} K(a,a) & K(a,b) \\ K(b,a) & K(b,b) \end{bmatrix}.$$

Por el criterio de núcleos, $\quad G_K(a,b) \geq 0.$

Luego $\det(G_K(a,b)) \geq 0$.

Demostración

Consideremos la matriz

$$G_K(a,b) = \begin{bmatrix} K(a,a) & K(a,b) \\ K(b,a) & K(b,b) \end{bmatrix}.$$

Por el criterio de núcleos, $\quad G_K(a,b) \geq 0.$

Luego $\det(G_K(a,b)) \geq 0.$ $\quad$ Calculemos este determinante:

$$\det(G_K(a,b))$$

Demostración

Consideremos la matriz

$$G_K(a,b) = \begin{bmatrix} K(a,a) & K(a,b) \\ K(b,a) & K(b,b) \end{bmatrix}.$$

Por el criterio de núcleos, $\quad G_K(a,b) \geq 0.$

Luego $\det(G_K(a,b)) \geq 0.$ $\quad$ Calculemos este determinante:

$$\det(G_K(a,b)) =$$

Demostración

Consideremos la matriz

$$G_K(a,b) = \begin{bmatrix} K(a,a) & K(a,b) \\ K(b,a) & K(b,b) \end{bmatrix}.$$

Por el criterio de núcleos, $\quad G_K(a,b) \geq 0.$

Luego $\det(G_K(a,b)) \geq 0.$ $\quad$ Calculemos este determinante:

$$\det(G_K(a,b)) = K(a,a)K(b,b) - K(a,b)K(b,a)$$

Demostración

Consideremos la matriz

$$G_K(a,b) = \begin{bmatrix} K(a,a) & K(a,b) \\ K(b,a) & K(b,b) \end{bmatrix}.$$

Por el criterio de núcleos, $\quad G_K(a,b) \geq 0.$

Luego $\det(G_K(a,b)) \geq 0.$ $\quad$ Calculemos este determinante:

$$\det(G_K(a,b)) = K(a,a)K(b,b) - K(a,b)K(b,a) =$$

Demostración

Consideremos la matriz

$$G_K(a, b) = \begin{bmatrix} K(a, a) & K(a, b) \\ K(b, a) & K(b, b) \end{bmatrix}.$$

Por el criterio de núcleos, $\quad G_K(a, b) \geq 0.$

Luego $\det(G_K(a, b)) \geq 0.$ $\quad$ Calculemos este determinante:

$$\det(G_K(a, b)) = K(a, a)K(b, b) - K(a, b)K(b, a) = K(a, a)K(b, b) - |K(a, b)|^2.$$

Plan

El caso real: la propiedad $q_A \geq 0$ no implica que $A^\top = A$

Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

El caso real: la propiedad $q_A \geq 0$ no implica que $A^\top = A$

Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces para cada $\xi \in \mathbb{R}^2$ tenemos

$$A\xi$$

El caso real: la propiedad $q_A \geq 0$ no implica que $A^\top = A$

Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces para cada $\xi \in \mathbb{R}^2$ tenemos

$$A\xi =$$

El caso real: la propiedad $q_A \geq 0$ no implica que $A^\top = A$

Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces para cada $\xi \in \mathbb{R}^2$ tenemos

$$A\,\xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

El caso real: la propiedad $q_A \geq 0$ no implica que $A^\top = A$

Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces para cada $\xi \in \mathbb{R}^2$ tenemos

$$A\,\xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} =$$

El caso real: la propiedad $q_A \geq 0$ no implica que $A^\top = A$

Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces para cada $\xi \in \mathbb{R}^2$ tenemos

$$A\xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{bmatrix},$$

El caso real: la propiedad $q_A \geq 0$ no implica que $A^\top = A$

Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces para cada $\xi \in \mathbb{R}^2$ tenemos

$$A\xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{bmatrix}, \qquad q_A(\xi) = \langle A\xi, \xi \rangle$$

El caso real: la propiedad $q_A \geq 0$ no implica que $A^\top = A$

Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces para cada $\xi \in \mathbb{R}^2$ tenemos

$$A\xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{bmatrix}, \qquad q_A(\xi) = \langle A\xi, \xi \rangle =$$

El caso real: la propiedad $q_A \geq 0$ no implica que $A^\top = A$

Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces para cada $\xi \in \mathbb{R}^2$ tenemos

$$A\xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{bmatrix}, \qquad q_A(\xi) = \langle A\xi, \xi \rangle = -\xi_2\xi_1 + \xi_1\xi_2$$

El caso real: la propiedad $q_A \geq 0$ no implica que $A^\top = A$

Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces para cada $\xi \in \mathbb{R}^2$ tenemos

$$A\xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{bmatrix}, \qquad q_A(\xi) = \langle A\xi, \xi \rangle = -\xi_2\xi_1 + \xi_1\xi_2 =$$

El caso real: la propiedad $q_A \geq 0$ no implica que $A^\top = A$

Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces para cada $\xi \in \mathbb{R}^2$ tenemos

$$A\xi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{bmatrix}, \qquad q_A(\xi) = \langle A\xi, \xi \rangle = -\xi_2\xi_1 + \xi_1\xi_2 = 0.$$

Tenemos que $q_A \geq 0$. Sin embargo, A no es simétrica.

Núcleo real

Sea X un conjunto y sea $K\colon X^2 \to \mathbb{R}$.

Se dice que K es un núcleo real, si K tiene las siguientes propiedades.

1. K es simétrica:
$$\forall a, b \in X \qquad K(b, a) = K(a, b).$$

2. Para cada m, cualesquiera $a_1, \ldots, a_m$ en X y cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ en $\mathbb{R}$,
$$\sum_{r,s=1}^{m} \lambda_r \lambda_s K(a_r, a_s) \geq 0.$$

Criterio de núcleos reales en términos de matrices positivas

Las siguientes propiedades de núcleos reales se demuestran de la misma manera que las propiedades de núcleos complejos.

Criterio de núcleos reales en términos de matrices positivas

Las siguientes propiedades de núcleos reales se demuestran de la misma manera que las propiedades de núcleos complejos.

Proposición

Sea $K\colon X^2 \to \mathbb{R}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) K es un núcleo real;

(b) para cada m en $\mathbb{N}$ y cada $a_1, \ldots, a_m$ en X,

$$G_K(a_1, \ldots, a_m) \geq 0.$$

Determinantes de las matrices de Gram asociadas al núcleo real

Proposición

Sean $K\colon X^2 \to \mathbb{R}$ un núcleo real.

Entonces para cada m en $\mathbb{N}$ y cada $a_1, \ldots, a_m$ en X,

$$\det(G_K(a_1, \ldots, a_m)) \geq 0.$$

Propiedades elementales de núcleos reales

Proposición (los valores del núcleo en la diagonal son no negativos)

Sea $K\colon X^2 \to \mathbb{R}$ un núcleo real. Entonces para cada a en X,

$$K(a, a) \geq 0.$$

Propiedades elementales de núcleos reales

Proposición (los valores del núcleo en la diagonal son no negativos)

Sea $K\colon X^2 \to \mathbb{R}$ un núcleo real. Entonces para cada a en X,

$$K(a, a) \geq 0.$$

Proposición (la desigualdad de Schwarz para núcleos reales)

Sea $K\colon X^2 \to \mathbb{R}$ un núcleo real. Entonces para cada a, b en X,

$$K(a, b)^2 \leq K(a, a)K(b, b).$$