

Inversión de la transformada de Fourier

Definición 1 (puntos de Lebesgue de una función). Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Denotemos por $\text{Leb}(f)$ al conjunto de los puntos de Lebesgue de f :

$$\text{Leb}(f) := \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(y) - f(x)| dy = 0 \right\}.$$

La utilidad de los puntos de Lebesgue se muestra en el siguiente resultado simple.

Proposición 2. Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y sea $x \in \text{Leb}(f)$. Entonces

$$f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_{(x-\delta, x+\delta)} f(y) dy.$$

Demostración. Notamos que

$$\frac{1}{2\delta} \int_{(x-\delta, x+\delta)} f(y) dy - f(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{(x-\delta, x+\delta)} (f(y) - f(x)) dy.$$

Acotamos el valor absoluto de la integral por la integral del valor absoluto:

$$\left| \frac{1}{2\delta} \int_{(x-\delta, x+\delta)} f(y) dy - f(x) \right| \leq \frac{1}{2\delta} \int_{(x-\delta, x+\delta)} |f(y) - f(x)| dy.$$

La condición $x \in \text{Leb}(f)$ implica que la última integral tiende a cero, cuando δ tiende a cero. \square

Proposición 3. Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y sea $x \in \mathbb{R}$. Supongamos que f es continua en x . Entonces $x \in \text{Leb}(f)$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $\delta_1 > 0$ tal que

$$\forall y \in (x - \delta_1, x + \delta_1) \quad |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Si $\delta \in (0, \delta_1)$, entonces

$$\frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(y) - f(x)| dy \leq \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \varepsilon dy = \varepsilon.$$

Hemos demostrado que $x \in \text{Leb}(f)$. \square

Proposición 4. Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y sea $x \in \text{Leb}(f)$. Entonces

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} (H_t * f)(x).$$

Demostración. Para cada $r > 0$ pongamos

$$\Phi(r) = \int_{x-r}^{x+r} (f(y) - f(x)) dy.$$

De manera equivalente,

$$\Phi(r) = \int_x^{x+r} f(y) dy + \int_{x-r}^x f(y) dy - 2r f(x).$$

Como f es Lebesgue-integrable, podemos aplicar el primer teorema fundamental de cálculo. Para casi todo $r > 0$ se tiene que

$$\Phi'(r) = f(x+r) + f(x-r). \quad (1)$$

La hipótesis que $x \in \text{Leb}(f)$ implica que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \Phi(r) \right) = 0.$$

Por consecuencia, $\Phi(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$. Además, $|\Phi(r)| \leq \|f\|_1 + 2r|f(x)|$, así que el cociente $|\Phi(r)|/r$ es acotado por alguna constante M :

$$\frac{|\Phi(r)|}{r} \leq M.$$

Consideremos la diferencia $(H_t * f)(x) - f(x)$:

$$\begin{aligned} (H_t * f)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y) H_t(y) dy - \int_{\mathbb{R}} f(x) H_t(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} (f(x+y) - f(x)) H_t(y) dy \\ &= \int_0^{+\infty} f(x-y) H_t(y) dy + \int_0^{+\infty} f(x+y) H_t(y) dy \\ &= \int_0^{+\infty} (f(x-y) + f(x+y)) H_t(y) dy \\ &= \int_0^{+\infty} \Phi'(r) H_t(r) dr. \end{aligned}$$

Integramos por partes usando los hechos que $\Phi(r)H_t(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$ y cuando $r \rightarrow +\infty$:

$$(H_t * f)(x) - f(x) = - \int_0^{+\infty} \Phi(r)H_t'(r) dr = \int_0^{+\infty} \Phi(r) \frac{r e^{-r^2/(4t)}}{2t \sqrt{4\pi t}} dr.$$

Acotamos por arriba haciendo el cambio de variable $r = s\sqrt{t}$:

$$|(H_t * f)(x) - f(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{|\Phi(s\sqrt{t})|}{s\sqrt{t}} \frac{s^2 e^{-s^2/4}}{2\sqrt{4\pi}} ds.$$

Notamos que la función $t \mapsto \frac{|\Phi(s\sqrt{t})|}{s\sqrt{t}}$ es acotada por una constante M y tiende a cero cuando t tiende a cero. La familia de las funciones bajo el signo de integral se puede acotar por una función integrable:

$$\frac{|\Phi(s\sqrt{t})|}{s\sqrt{t}} \frac{s^2 e^{-s^2/4}}{2\sqrt{4\pi}} \leq \frac{M}{2\sqrt{4\pi}} s^2 e^{-s^2/4}.$$

Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, podemos calcular el límite de la familia de integrales como la integral de la función límite, pero la última es cero:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\Phi(s\sqrt{t})|}{s\sqrt{t}} \frac{s^2 e^{-s^2/4}}{2\sqrt{4\pi}} = 0. \quad \square$$

Teorema 5 (fórmula de inversión de Fourier en un punto de Lebesgue, suponiendo que la función y su transformada de Fourier son integrables). *Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, y sea $x \in \text{Leb}(f)$. Entonces*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} dx.$$

Demostración. Como ya hemos visto,

$$(H_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 t \xi^2} e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

Vamos a pasar al límite cuando t tiende a 0. Por la Proposición 4, $(H_t * f)(x) \rightarrow f(x)$. La familia de funciones bajo la integral del lado derecho se puede acotar por la función integrable $|\widehat{f}|$:

$$|\widehat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 t \xi^2} e^{2\pi i \xi x}| = |\widehat{f}(\xi)| e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \leq |\widehat{f}(\xi)|,$$

por eso podemos aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} e^{2\pi i \xi x} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\widehat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 t \xi^2} e^{2\pi i \xi x} \right) = \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}. \quad \square$$

Teorema 6 (la fórmula de inversión de Fourier para las funciones integrables continuas cuyas transformadas de Fourier son integrables). *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. Supongamos que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces para cada x en \mathbb{R} se tiene*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} dx.$$

La fórmula de inversión de Fourier sin pedir la continuidad

Aceptamos sin demostración el siguiente resultado de análisis real avanzado.

Teorema 7 (el teorema de diferenciación de Lebesgue, sin demostración). *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces la medida de Lebesgue del conjunto $\mathbb{R} \setminus \text{Leb}(f)$ es cero. En otras palabras, casi todos los números reales son puntos de Lebesgue de f .*

Teorema 8 (la fórmula de inversión de Fourier). *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces para casi todo x en \mathbb{R} ,*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} dx.$$