El interior del conjunto en un espacio métrico

Sea (X, d) un espacio métrico. Denotamos por τ_d a la topología inducida por d.

1 Proposición. *Sea* $A \subseteq X$ *y sea* $a \in A$. *Entonces* $a \in \operatorname{int}_d(A)$ *si y solo si existe* V *en* τ_d *tal que* $a \in V$ *y* $V \subseteq A$.

Demostración. 1. Supongamos que $a \in \operatorname{int}_d(A)$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq A$. Pongamos $V := B(a, r)$. Entonces $a \in V$ y $V \in \tau_d$.

2. Supongamos que existe V en τ_d tal que $a \in V$ y $V \subseteq A$. Como $V \in \tau_d$ y $a \in V$, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq V$. Luego $B(a, r) \subseteq A$. Esto implica que $a \in \operatorname{int}_d(A)$. □

En lo que sigue, en vez de $\operatorname{int}_d(A)$ escribimos simplemente $\operatorname{int}(A)$. Ya sabemos que $\operatorname{int}(A) \subseteq A$.

2 Proposición. *Sea* $A \subseteq X$. *Entonces* $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int}(A)$, *así que* $\operatorname{int}(A) \in \tau_d$.

Demostración. Ya sabemos que para cualquier conjunto $B \subseteq X$ se tiene la contención $\operatorname{int}(B) \subseteq B$. Por lo tanto, $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) \subseteq \operatorname{int}(A)$. Mostremos que $\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{int}(A))$. Sea $a \in \operatorname{int}(A)$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq A$. Para cada x en $B(a, r)$ pongamos $s := r - d(a, x)$ y obtenemos $B(x, s) \subseteq B(a, r) \subseteq A$, así que $x \in \operatorname{int}(A)$. Luego $B(a, r) \subseteq \operatorname{int}(A)$. Hemos mostrado que $a \in \operatorname{int}(\operatorname{int}(A))$. Luego $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int}(A)$, por lo cual $\operatorname{int}(A) \in \tau_d$. □

3 Proposición. *Sean* $A_1, A_2 \subseteq X$. *Entonces*

$$\operatorname{int}(A_1 \cap A_2) = \operatorname{int}(A_1) \cap \operatorname{int}(A_2).$$

Demostración. 1. Sea $a \in \operatorname{int}(A_1 \cap A_2)$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq A_1 \cap A_2$. Luego $B(a, r) \subseteq A_1$ y $B(a, r) \subseteq A_2$, así que $a \in \operatorname{int}(A_1)$ y $a \in \operatorname{int}(A_2)$.

2. Sea $a \in \operatorname{int}(A_1) \cap \operatorname{int}(A_2)$. Entonces existe $r_1 > 0$ tal que $B(a, r_1) \subseteq A_1$, y existe $r_2 > 0$ tal que $B(a, r_2) \subseteq A_2$. Pongamos $r_3 := \min\{r_1, r_2\}$. Entonces $B(a, r_3) = B(a, r_1) \cap B(a, r_2) \subseteq A_1 \cap A_2$, así que $a \in \operatorname{int}(A_1 \cap A_2)$. □

4 Proposición. *Sean* $Y, Z \subseteq X$ *tales que* $Y \subseteq Z$. *Entonces* $\operatorname{int}(Y) \subseteq \operatorname{int}(Z)$.

Demostración. Sea $a \in \operatorname{int}(Y)$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq Y$. Luego $B(a, r) \subseteq Z$ y $a \in \operatorname{int}(Z)$. □

5 Proposición. *Sea* $A \subseteq X$ *y sea* $V \in \tau_d$ *tal que* $V \subseteq A$*. Entonces* $V \subseteq \operatorname{int}(A)$*.*

Demostración. Sea $a \in V$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq V$. Luego $B(a, r) \subseteq A$ y $a \in \operatorname{int}(A)$. □

6 Proposición. *Sea* $A \subseteq X$*. Entonces* $\operatorname{int}(A)$ *es el más grande entre todos los subconjuntos abiertos contenidos en* A*.*

Demostración. Por la Proposición 2, $\operatorname{int}(A)$ es un conjunto abierto. Por la Proposición 5, $\operatorname{int}(A)$ es el más grande entre todos los conjuntos abiertos contenidos en A. □

7 Proposición. *Sea* $A \subseteq X$*. Entonces*

$$\operatorname{int}(A) = \cup \mathcal{V}, \qquad \textit{donde} \qquad \mathcal{V} = \{B \in \tau_d \colon\ B \subseteq A\}.$$

Demostración. Por un lado, $\operatorname{int}(A) \in \mathcal{V}$, por lo cual $\operatorname{int}(A) \subseteq \cup \mathcal{V}$. Por otro lado, si $x \in \cup \mathcal{V}$, entonces existe $B \in \mathcal{V}$ tal que $x \in B$. Sabemos que $B \subseteq \operatorname{int}(A)$, por lo tanto $x \in \operatorname{int}(A)$. □