Propiedades elementales de la integral de funciones simples positivas medibles

Objetivos. Estudiar propiedades elementales de la integral de Lebesgue de funciones simples positivas medibles.

Requisitos. Definición de la integral de Lebesgue de funciones simples medibles positivas.

En todo este tema suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida. En estos apuntes denotamos $[0, +\infty)$ por $\mathbb{R}_+$.
Recordemos las fórmulas que demostramos en el tema anterior.

1 Proposición (la integral de una función simple medible positiva dada por su representación generalizada, repaso)**.** *Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ una función simple medible dada por su representación generalizada:*

$$f = \sum_{k=1}^{n} w_k \, \mathbb{1}_{Q_k}.$$

Aquí suponemos que $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}_+$ y $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{F}$ son algunos conjuntos disjuntos a pares cuya unión es igual a X. Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} w_k \mu(Q_k). \tag{1}$$

2 Proposición (fórmula para la integral sobre un conjunto)**.** *Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ y sea $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica o generalizada:*

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j}.$$

Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j \cap A).$$

Propiedades elementales

3 Proposición. *Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \geq 0.$$

4 Proposición (la integral de una función simple medible positiva sobre un conjunto de medida cero). *Sea* $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ *y sea* $A \in \mathcal{F}$ *tal que* $\mu(A) = 0$. *Entonces*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

5 Proposición (la integral sobre un conjunto donde la función es constante, el caso de una función simple positiva). *Sean* $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$, $w \in \mathbb{R}_+$ *y* $A \in \mathcal{F}$ *tales que*

$$f(x) = w \qquad \forall x \in A.$$

Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = w \, \mu(A).$$

6 Proposición (la integral de una función simple que se anula en el conjunto de la integración). *Sea* $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ *y sea* $A \in \mathcal{F}$. *Si* $f(x) = 0$ *para todo* x *en* A, *entonces*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

7 Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ y sea $A \in \mathcal{F}$. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

La medida definida como la integral de una función simple medible positiva sobre el conjunto de integración variable

8 Proposición (proposición de la medida definida como la integral de una función simple medible positiva sobre el conjunto de integración variable). *Sea* $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$. *Definimos* $\varphi \colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ *mediante la siguiente regla:*

$$\varphi(A) \coloneqq \int_A f \, \mathrm{d}\mu \qquad (A \in \mathcal{F}).$$

Entonces φ *es una medida.*

9 Corolario (monotonía de la integral de una función simple positiva respecto al conjunto de integración). *Sea* $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ *y sean* $A, B \in \mathcal{F}$ *tales que* $A \subseteq B$. *Entonces*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \le \int_B f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Como φ es una medida, $\varphi(A) \le \varphi(B)$. □

Propiedades aritméticas de la integral de funciones simples medibles positivas

Por simplicidad, en las siguientes proposiciones integramos sobre X. Es fácil generalizarlas a las integrales sobre A.

10 Proposición (propiedad homogénea de la integral, el caso de una función simple positiva)**.** *Sea* $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ *y sea* $c \in \mathbb{R}_+$. *Entonces*

$$\int\limits_X c\, f \,\mathrm{d}\mu = c \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

11 Proposición (la integral de la suma de funciones simples positivas)**.** *Sean* $f, g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$. *Entonces*

$$\int\limits_X (f + g) \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración. Si f y g tienen representaciones canónicas

$$f = \sum_{p=1}^{m} \alpha_p \mathbb{1}_{A_p}, \qquad g = \sum_{q=1}^{n} \beta_q \mathbb{1}_{B_q},$$

entonces una representación generalizada de $f + g$ es

$$f + g = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} (\alpha_p + \beta_q) \mathbb{1}_{A_p \cap B_q}.$$

Gracias a la Proposición 1, podemos usar esta representación para escribir la integral $f + g$. Para completar la demostración demuestre que para cada p en $\{1, \ldots, m\}$ la familia $(A_p \cap B_q)_{q=1}^{n}$ es una partición generalizada de A_p, para cada $q \in \{1, \ldots, n\}$ la familia $(A_p \cap B_q)_{p=1}^{m}$ es una partición generalizada de B_q, y simplifique la suma

$$\int (f + g) \,\mathrm{d}\mu = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} (\alpha_p + \beta_q) \mu(A_p \cap B_q).$$

□

12 Proposición (monotonía de la integral con respecto a la función, el caso de funciones simples positivas)**.** *Sean* $f, g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ *tales que* $f \le g$. *Entonces*

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \le \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración. Definir $h \coloneqq f - g$ y integrar la igualdad $f = g + h$. □