Integración de funciones reales

Objetivos. Definir la integral de Lebesgue de funciones reales y estudiar sus propiedades elementales.

Requisitos. Integral de Lebesgue de funciones positivas, parte positiva y negativa de una función real.

1. Parte positiva y negativa de una función, repaso. Sea $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Entonces su *parte positiva* y la *parte negativa* son las funciones $f_+\colon X \to [0, +\infty]$ y $f_-\colon X \to [0, +\infty]$ definidas mediante las siguientes reglas:

$$f_+(t) := \begin{cases} f(t), & f(t) \ge 0, \\ 0, & f(t) < 0; \end{cases} \qquad f_-(t) := \begin{cases} -f(t), & f(t) \le 0, \\ 0, & f(t) > 0. \end{cases}$$

Verifique las siguientes relaciones entre f, $|f|$, f_+ y f_-:

$$f_+ = \frac{f + |f|}{2}, \qquad f_- = \frac{|f| - f}{2}, \qquad f = f_+ - f_-, \qquad |f| = f_+ + f_-.$$

2. Cotas superiores para la parte positiva y negativa. Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$. Entonces para todo $t \in X$

$$|f_+(t)| \le |f(t)|, \qquad |f_-(t)| \le |f(t)|, \qquad |f(t)| = f_+(t) + f_-(t).$$

3. Proposición. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) $\displaystyle\int_X |f|\, d\mu < +\infty.$

(b) $\displaystyle\int_X f_+\, d\mu < +\infty \quad \wedge \quad \int_X f_-\, d\mu < +\infty.$

4. Definición de la integral de Lebesgue de una función real. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio con medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Se dice que f es *Lebesgue-integrable* con respecto a la medida μ y se escribe $f \in L^1(X, \mu, \mathbb{R})$ si

$$\int_X |f|\, d\mu < +\infty.$$

En este caso para todo $E \in \mathcal{F}$ la *integral de f sobre X con respecto a la medida μ* se define como

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f_+\, d\mu - \int_E f_-\, d\mu.$$

5. Observación. Obviamente para funciones positivas la definión nueva da el mismo valor que la definición anterior.

Propiedades lineales de la integral de Lebesgue de funciones reales

6. Ejemplo cuando la parte positiva de la suma de dos funciones no es igual a la suma de sus partes positivas. Construya un ejemplo de funciones f, g tales que

$$(f+g)_+ \neq f_+ + g_+.$$

7. Teorema (integral de la suma de dos funciones reales integrables). Sean $f, g \in L^1(X, \mu, \mathbb{R})$. Entonces $f + g \in L^1(X, \mu, \mathbb{R})$ y

$$\int\limits_X (f+g)\, d\mu = \int\limits_X f\, d\mu + \int\limits_X g\, d\mu. \tag{1}$$

Demostración. Notemos que para todo $t \in X$

$$(f+g)_+ - (f+g)_- = f + g = f_+ - f_- + g_+ - g_-.$$

De aquí

$$(f+g)_+ + f_- + g_- = (f+g)_- + f_+ + g_+.$$

Es importante que ahora en ambos lados de la igualdad tenemos sumas de funciones positivas, por eso podemos aplicar la proposición sobre la integral de la suma de funciones positivas.

$$\int\limits_X (f+g)_+\, d\mu + \int\limits_X f_-\, d\mu + \int\limits_X g_-\, d\mu = \int\limits_X (f+g)_-\, d\mu + \int\limits_X f_+\, d\mu + \int\limits_X g_+\, d\mu.$$

Todos los sumandos son finitos, por eso podemos pasarlos a otros lados de la igualdad:

$$\int\limits_X (f+g)_+\, d\mu - \int\limits_X (f+g)_-\, d\mu = \int\limits_X f_+\, d\mu - \int\limits_X f_-\, d\mu + \int\limits_X g_+\, d\mu - \int\limits_X g_-\, d\mu.$$

Aplicamos la definición de la integral de Lebesgue de funciones reales y obtenemos la igualdad (1). □

8. Lema (integral del producto de una función real integrable por -1). Sea $f \in L^1(X, \mu, \mathbb{R})$. Entonces $-f \in L^1(X, \mu, \mathbb{R})$ y

$$\int\limits_X (-f)\, d\mu = -\int\limits_X f\, d\mu.$$

9. Teorema (integral del producto de una función real integrable por un escalar). Sea $f \in L^1(X, \mu, \mathbb{R})$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $\alpha f \in L^1(X, \mu, \mathbb{R})$ y

$$\int\limits_X (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int\limits_X f\, d\mu.$$