Integración de funciones positivas

Objetivos. Definir la integral de Lebesgue de funciones positivas y estudiar sus propiedades elementales.

Requisitos. Funciones medibles, medida, integral de funciones simples positivas medibles.

Estamos suponiendo que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida. En este tema usaremos dos notaciones auxiliares.

1 Definición (el conjunto de las funciones simples medibles positivas menores o iguales que la función dada)**.** Dada una función medible positiva $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$, denotemos por Φ_f al conjunto de todas las funciones simples medibles positivas que son menores o iguales a f en cada punto:

$$\Phi_f := \Big\{ s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) \colon \quad s \le f \Big\}.$$

2 Definición (la integral como un funcional)**.** Sea $Y \in \mathcal{F}$. Definimos

$$J_Y \colon \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) \to [0, +\infty], \qquad J_Y(s) := \int\limits_Y s \, \mathrm{d}\mu.$$

Sería más preciso escribir $\Phi_{\mathcal{F},f}$ y $J_{Y,\mu}$, pero $\mathcal{F}$ y μ están fijas. Por brevedad, no las indicamos.

3 Proposición. *Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sea $Y \in \mathcal{F}$. Entonces,*

$$J_Y(f) = \max(J_Y[\Phi_f]),$$

esto es,

$$\int\limits_Y f \, \mathrm{d}\mu \;=\; \max \left\{ \int\limits_Y s \, \mathrm{d}\mu \colon \quad s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) \quad \wedge \quad s \le f \right\}.$$

Demostración. Como f es simple y $f \le f$, tenemos que $f \in \Phi_f$. Además, para cada s en Φ_f, se tiene la desigualdad

$$J_Y(s) = \int\limits_Y s \, \mathrm{d}\mu \le \int\limits_Y f \, \mathrm{d}\mu = J_Y(f).$$

Por lo tanto, el número $J_Y(f)$ es el elemento máximo del conjunto $J_Y[\Phi_f]$. $\square$

4 Definición (la integral de Lebesgue de una función medible positiva)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sea $Y \in \mathcal{F}$. Entonces, *la integral de Lebesgue de f sobre E respecto a la medida μ* se define mediante la siguiente fórmula:

$$\int\limits_Y f \, \mathrm{d}\mu \;\coloneqq\; \sup \left\{ \int\limits_Y s \, \mathrm{d}\mu \colon \quad s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) \quad \wedge \quad s \leq f \right\}. \tag{1}$$

Usando la notación Φ_f y J_Y, podemos escribir la definición (1) de la siguiente manera:

$$\int\limits_Y f \, \mathrm{d}\mu \;\coloneqq\; \sup(J_Y[\Phi_f]).$$

La proposición antes de la definición muestra que para las funciones simples $\mathcal{F}$-medibles positivas la definición nueva da el mismo valor de la integral que la definición original.

Algunas propiedades de la integral de Lebesgue de funciones positivas medibles

Se supone que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

5 Proposición. *Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sea $Y \in \mathcal{F}$. Entonces,*

$$\int\limits_Y f \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X \mathbb{1}_Y f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Primero, mostremos que $\mathbb{1}_Y \Phi_f = \Phi_{\mathbb{1}_Y f}$, esto es,

$$\Phi_{\mathbb{1}_Y f} \;=\; \Big\{ g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty) \colon \;\; \exists s \in \Phi_f \quad g = \mathbb{1}_Y s \Big\}. \tag{2}$$

$\subseteq$. Si $g \in \Phi_{\mathbb{1}_Y f}$, entonces g se anula en el conjunto $X \setminus Y$, así que $g = \mathbb{1}_Y g$.

$\supseteq$. Al revés, si $g = \mathbb{1}_Y s$, donde $s \in \Phi_f$, entonces es fácil ver que $g \leq \mathbb{1}_Y f$.

Hemos demostrado (2). Aplicamos J_X a ambos lados de (2):

$$\begin{aligned} J_X[\Phi_{\mathbb{1}_Y f}] \;&=\; \left\{ \int\limits_X s \, \mathrm{d}\mu \colon \;\; s \leq \mathbb{1}_Y f \right\} \;=\; \left\{ \int\limits_X \mathbb{1}_Y \, s \, \mathrm{d}\mu \colon \;\; s \leq f \right\} \\ &=\; \left\{ \int\limits_Y s \, \mathrm{d}\mu \colon \;\; s \leq f \right\} \;=\; J_Y[\Phi_f]. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicamos sup y obtenemos el resultado. $\square$

6 Proposición (la integral de una función positiva sobre un conjunto de medida cero)**.** *Sea* $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ *y sea* $Y \in \mathcal{F}$ *tal que* $\mu(Y) = 0$. *Entonces,*

$$\int_Y f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Demostración. Para cada s en Φ_f, tenemos que

$$J_Y(s) = \int_Y s \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Por lo tanto, $J_Y[\Phi_f] = \{0\}$. □

7 Proposición (monotonía de la integral respecto al conjunto de integración, el caso de una función positiva)**.** *Sea* $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ *y sean* $A, B \in \mathcal{F}$ *tales que* $A \subseteq B$. *Entonces,*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \le \int_B f \, \mathrm{d}\mu. \tag{3}$$

Demostración. Para cada s en Φ_f, aplicamos la monotonía de la integral de una función simple positiva respecto al conjunto de integración:

$$J_A(s) \;=\; \int_A s \, \mathrm{d}\mu \;\le\; \int_B s \, \mathrm{d}\mu \;=\; J_B(s).$$

Pasando al supremo sobre s en Φ_f, obtenemos la desigualdad (3). □

8 Proposición (monotonía de la integral respecto a la función, el caso de funciones positivas)**.** *Sean* $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ *y* $Y \in \mathcal{F}$ *tales que*

$$\forall x \in Y \qquad f(x) \le g(x).$$

Entonces,

$$\int_Y f \, \mathrm{d}\mu \le \int_Y g \, \mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración. $\Phi_{f\mathbb{1}_Y} \subseteq \Phi_{g\mathbb{1}_Y}$. □

Demuestre las siguientes propiedades usando la notación Φ_f, propiedades de la integral de funciones medibles simples positivas y las propiedades de funciones medibles positivas mencionadas arriba.

9 Proposición (integral de una función positiva que es constante en el conjunto de integración)**.** *Sean* $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$*,* $Y \in \mathcal{F}$ *y* $c \in [0, +\infty]$ *tales que*

$$\forall x \in Y \qquad f(x) = c.$$

Entonces,

$$\int\limits_Y f \, \mathrm{d}\mu = c\mu(Y).$$

10 Proposición (la integral de una función positiva que se anula en el conjunto de integración)**.** *Sea* $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ *y sea* $Y \in \mathcal{F}$*. Supongamos que*

$$\forall x \in Y \qquad f(x) = 0.$$

Entonces,

$$\int\limits_Y f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

11 Proposición (propiedad homogénea de la integral, el caso de funciones positivas)**.** *Sea* $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$*, sea* $c \in [0, +\infty)$ *y sea* $Y \in \mathcal{F}$*. Entonces,*

$$\int\limits_Y c \, f \, \mathrm{d}\mu = c \int\limits_Y f \, \mathrm{d}\mu.$$

12 Observación (nota sobre la propiedad aditiva de la integral respecto a la función, el caso de funciones positivas)**.** Vamos a demostrar la propiedad aditiva después, usando el teorema de la convergencia monótona.