Integración de funciones positivas

Objetivos. Definir la integral de Lebesgue de funciones positivas y estudiar sus propiedades elementales.

Requisitos. Funciones medibles, medida, integral de funciones simples positivas medibles.

1. Notación. Dada una función medible positiva $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$, denotemos por Φ_f al conjunto de todas las funciones simples medibles positivas que son menores o iguales a f en cada punto:

$$\Phi_f := \Big\{ s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+) \colon \quad s \le f \Big\}.$$

2. Proposición. Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+)$ y sea $E \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int\limits_E f \, d\mu \; = \; \sup \left\{ \int\limits_E s \, d\mu \colon \quad s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+) \quad \wedge \quad s \le f \right\}.$$

Demostración. Como f es simple y $f \le f$, tenemos que $f \in \Phi_f$. Además para toda $s \in \Phi_f$ se tiene la desigualdad

$$\int\limits_E s \, d\mu \le \int\limits_E f \, d\mu.$$

Por lo tanto, el número $\int_E f \, d\mu$ es el máximo del conjunto

$$\left\{ \int\limits_E s \, d\mu \colon \quad s \in \Phi_f \right\}. \qquad \square$$

3. Definición (integral de Lebesgue de una función medible positiva). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ y sea $E \in \mathcal{F}$. Entonces *la integral de Lebesgue de f sobre E respecto a la medida μ* se define mediante la siguiente fórmula:

$$\int\limits_E f \, d\mu \; := \; \sup \left\{ \int\limits_E s \, d\mu \colon \quad s \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}_+) \quad \wedge \quad 0 \le s \le f \right\}. \tag{1}$$

Usando la notación Φ_f podemos escribir la definición (1) de la siguiente manera:

$$\int\limits_E f \, d\mu \; := \; \sup_{s \in \Phi_f} \int\limits_E s \, d\mu.$$

La proposición antes de la definición muestra que para las funciones simples $\mathcal{F}$-medibles positivas la definición nueva da el mismo valor de la integral que la definición original.

Algunas propiedades de la integral de Lebesgue de funciones positivas medibles

Se supone que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

4. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ y sea $E \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_X \chi_E\, f\, d\mu.$$

Idea de demostración. $\chi_E \Phi_f = \Phi_{\chi_E f}$. □

5. Integral de una función positiva sobre un conjunto de medida cero. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ y sea $E \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(E) = 0$. Entonces

$$\int\limits_E f\, d\mu = 0.$$

Demostración. Para toda $s \in \Phi_f$ tenemos que $\int_E s\, d\mu = 0$. □

6. Monotonía de la integral respecto al conjunto de integración, el caso de una función positiva. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ y sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subset B$. Entonces

$$\int\limits_A f\, d\mu \le \int\limits_B f\, d\mu. \tag{2}$$

Demostración. Para toda $s \in \Phi_f$ aplicamos la monotonía de la integral de una función simple positiva respecto al conjunto de integración:

$$\int\limits_A s\, d\mu \le \int\limits_B s\, d\mu.$$

Pasando al supremo sobre $s \in \Phi_f$ obtenemos la desigualdad (2). □

7. Monotonía de la integral respecto a la función, el caso de funciones positivas. Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ y $E \in \mathcal{F}$ tales que

$$\forall x \in E \qquad f(x) \le g(x).$$

Entonces

$$\int\limits_E f\, d\mu \le \int\limits_E g\, d\mu.$$

Idea de demostración. $\Phi_{f\chi_E} \subset \Phi_{g\chi_E}$. □

Demuestre las siguientes propiedades usando la notación Φ_f, propiedades de la integral de funciones medibles simples positivas y las propiedades de funciones medibles positivas mencionadas arriba.

8. Integral de una función positiva que es constante en el conjunto de integración. Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$, $E \in \mathcal{F}$ y $c \in \overline{\mathbb{R}}_+$ tales que

$$\forall x \in E \qquad f(x) = c.$$

Entonces

$$\int\limits_E f \, d\mu = c\mu(E).$$

9. Integral de una función positiva que se anula en el conjunto de integración. Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ y $E \in \mathcal{F}$ tales que

$$\forall x \in E \qquad f(x) = 0.$$

Entonces

$$\int\limits_E f \, d\mu = 0.$$

10. Propiedad homogénea de la integral, el caso de funciones positivas. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$, sea $c \in [0, +\infty)$ y sea $E \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int\limits_E cf \, d\mu = c \int\limits_E f \, d\mu.$$

11. Nota sobre la propiedad aditiva de la integral respecto a la función, el caso de funciones positivas. Es cómodo demostrar la propiedad aditiva usando el teorema de convergencia monótona.