Integrales de series y conjuntos de medida cero

Objetivos. Demostrar un par de resultados sobre las integrales de series de funciones, no necesariamente positivas y definidas casi en todas partes.

Requisitos. Medida, propiedad subaditiva de la medida, integración, teorema de convergencia monótona, teorema de la integral de una serie de funciones positivas.

1 Proposición (Integrales de funciones iguales casi en todas partes, repaso)**.** *Sean* $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ *o* $f, g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ *tales que* $f \overset{\mu}{\sim} g$. *Entonces*

$$\int\limits_X f\, d\mu = \int\limits_X g\, d\mu.$$

2 Definición (función medible definida casi en todas partes)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $Y \in \mathcal{F}$ y sea $f\colon Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o $f\colon Y \to \mathbb{C}$. Se dice que f es $\mathcal{F}$-medible si $\mu(Y^c) = 0$ y $f^{-1}[V] \in \mathcal{F}$ para todo conjunto abierto V. Notemos que en esta situación podemos extender f a X poniendo $f(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus Y$.

3 Proposición (cada función integrable toma valores finitos c.t.p., repaso)**.** *Sea* $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. *Entonces* $f < +\infty$ *c.t.p.*

4 Teorema. *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$. *Supongamos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X |f_n|\, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge casi en cada punto x, *su suma* g *es una función* μ*-integrable, y*

$$\int\limits_X g\, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n\, \mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración. Definamos $h\colon X \to [0, +\infty]$,

$$h(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Por el teorema de la integral de una serie de funciones positivas,

$$\int\limits_X h\, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X |f_n|\, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Sea
$$B \coloneqq \{x \in X\colon\ h(x) < +\infty\}, \qquad E \coloneqq \{x \in X\colon\ h(x) = +\infty\}.$$
Entonces $\mu(E) = 0$.

Para cada x en B, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge. Por lo tanto, para cada x en B, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge.

Definimos $g\colon X \to \mathbb{C}$,
$$g(x) \coloneqq \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x), & x \in B; \\ 0, & x \in E. \end{cases}$$
El resto de la demostración: aplicar el TCD a la sucesión de las sumas parciales de $(\mathbb{1}_B f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

5 Ejercicio. Considerar las funciones $f_n\colon [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $f_n = \chi_{[0,1/2^n]}$. Determinar en qué puntos de $[0,1]$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge.

6 Teorema. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{F}$ tal que*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty.$$
Definimos
$$E \coloneqq \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j.$$
Entonces $\mu(E) = 0$.

Demostración. Primero, encontramos otra descripción equivalente del conjunto E. Para cada x en X, pongamos
$$J_x \coloneqq \{n \in \mathbb{N}\colon\ x \in A_n\}.$$
Entonces
$$x \in E \quad\Longleftrightarrow\quad x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j \quad\Longleftrightarrow\quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad x \in A_n$$
$$\Longleftrightarrow\quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad n \in J_x \quad\Longleftrightarrow\quad J_x \text{ es infinito.}$$
Resumen: E es el conjunto te todos aquellos puntos x que pertenecen a A_n para una cantidad infinita de los índices n.

Definimos $g\colon X \to [0, +\infty]$,
$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x).$$

Como $\mathbb{1}_{A_n}$ toma valores 0 o 1,

$$g(x) = +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad J_x \text{ es infinito} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in E.$$

Aplicamos el teorema de la integral de una serie de funciones positivas:

$$\int\limits_X g \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty.$$

Concluimos que $\mu(E) < +\infty$. □