La integral con límite superior variable es una función absolutamente continua (un tema de análisis real)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

15 de noviembre de 2024

Objetivos

- Demostrar que si $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$ y $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ está definida por
$$F(x) := \int_{[a,x]} f \,\mathrm{d}\mu,$$
entonces $F \in \mathrm{AC}([a,b])$.

- Demostrar que si $F = 0$, entonces $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0$.

Prerrequisitos

- Funciones absolutamente continuas.
- Continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración.
- La integral de Lebesgue y una partición del dominio de integración.
- La medida de Lebesgue es regular por abajo.

Definición (repaso)

Una función $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ se llama absolutamente continua
si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que
para cada familia finita $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ de subintervalos disjuntos de $[a,b]$
que satisface $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$, se cumple la desigualdad:

$$\sum_{j=1}^n |F(d_j) - F(c_j)| < \varepsilon.$$

Denotemos por $\mathrm{AC}([a,b])$ al conjunto de todas funciones absolutamente continuas en $[a,b]$.

Recordatorio: continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración

Proposición

Sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$. Entonces,

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad \forall Y \in \mathcal{F} \qquad \left(\mu(Y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_Y |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon \right).$$

Repaso: la integral de Lebesgue y una partición del dominio de integración

Proposición

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$,
$Y \in \mathcal{F}$, $(Z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión disjunta en $\mathcal{F}$ tal que

$$Y = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Z_j.$$

Entonces,

$$\int_Y f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Z_j} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Repaso: la integral de Lebesgue y una partición del dominio de integración

Proposición

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$,
$Y \in \mathcal{F}$, $(Z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión disjunta en $\mathcal{F}$ tal que

$$Y = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Z_j.$$

Entonces,

$$\int_Y f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Z_j} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración: aplicar el teorema de la convergencia dominada o uno de sus corolarios.

La integral con límite superior variable y las integrales sobre subintervalos

Lema

Sea $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$F(x) := \int_{[a,x]} f\,\mathrm{d}\mu \qquad (x \in [a,b]).$$

Entonces, para cada x, y en $[a,b]$ con $x < y$,

$$F(y) - F(x) = \int_{(x,y)} f\,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración

Partimos el intervalo $[a, y]$:

$$[a, y] = [a, x] \cup (x, y], \qquad [a, x] \cap (x, y] = \emptyset.$$

Demostración

Partimos el intervalo $[a, y]$:

$$[a, y] = [a, x] \cup (x, y], \qquad [a, x] \cap (x, y] = \emptyset.$$

Luego

$$f\,\mathbb{1}_{[a,y]} = f\,\mathbb{1}_{[a,x]} + f\,\mathbb{1}_{(x,y)}.$$

Demostración

Partimos el intervalo $[a, y]$:

$$[a, y] = [a, x] \cup (x, y], \qquad [a, x] \cap (x, y] = \emptyset.$$

Luego

$$f\, \mathbb{1}_{[a,y]} = f\, \mathbb{1}_{[a,x]} + f\, \mathbb{1}_{(x,y)}.$$

Integramos:

$$F(y) = F(x) + \int_{(x,y]} f \,\mathrm{d}\mu = F(x) + \int_{(x,y)} f \,\mathrm{d}\mu.$$

La integral con límite superior variable de una función Lebesgue integrable es una función absolutamente continua

Proposición

Sea $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$F(x) := \int_{[a,x]} f \,\mathrm{d}\mu \qquad (x \in [a,b]).$$

Entonces, $F \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$.

La integral con límite superior variable de una función Lebesgue integrable es una función absolutamente continua

Proposición

Sea $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$F(x) := \int_{[a,x]} f \, \mathrm{d}\mu \qquad (x \in [a,b]).$$

Entonces, $F \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{C})$.

Idea de la demostración:

usar la continuidad de la integral de Lebesgue respecto al conjunto de integración.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $\delta > 0$ tal que para cada A medible con $\mu(A) < \delta$,

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $\delta > 0$ tal que para cada A medible con $\mu(A) < \delta$,

$$\int_A |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $\delta > 0$ tal que para cada A medible con $\mu(A) < \delta$,

$$\int_A |f| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ es una familia de intervalos disjuntos tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.

Pongamos $A := \bigcup_{j=1}^n (c_j, d_j)$ y obtenemos:

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $\delta > 0$ tal que para cada A medible con $\mu(A) < \delta$,

$$\int_A |f| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ es una familia de intervalos disjuntos tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.

Pongamos $A \coloneqq \bigcup_{j=1}^n (c_j, d_j)$ y obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{n} |F(d_j) - F(c_j)|$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $\delta > 0$ tal que para cada A medible con $\mu(A) < \delta$,

$$\int_A |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ es una familia de intervalos disjuntos tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.

Pongamos $A := \bigcup_{j=1}^n (c_j, d_j)$ y obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{n} |F(d_j) - F(c_j)| = \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{(c_j, d_j)} f \, \mathrm{d}\mu \right|$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $\delta > 0$ tal que para cada A medible con $\mu(A) < \delta$,

$$\int_A |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ es una familia de intervalos disjuntos tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.

Pongamos $A \coloneqq \bigcup_{j=1}^n (c_j, d_j)$ y obtenemos:

$$\sum_{j=1}^n |F(d_j) - F(c_j)| = \sum_{j=1}^n \left| \int_{(c_j, d_j)} f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \sum_{j=1}^n \int_{(c_j, d_j)} |f| \, \mathrm{d}\mu$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $\delta > 0$ tal que para cada A medible con $\mu(A) < \delta$,

$$\int_A |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ es una familia de intervalos disjuntos tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.

Pongamos $A := \bigcup_{j=1}^n (c_j, d_j)$ y obtenemos:

$$\sum_{j=1}^n |F(d_j) - F(c_j)| = \sum_{j=1}^n \left| \int_{(c_j, d_j)} f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \sum_{j=1}^n \int_{(c_j, d_j)} |f| \, \mathrm{d}\mu = \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $\delta > 0$ tal que para cada A medible con $\mu(A) < \delta$,

$$\int_A |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Sea $((c_j, d_j))_{j=1}^n$ es una familia de intervalos disjuntos tal que $\sum_{j=1}^n (d_j - c_j) < \delta$.

Pongamos $A := \bigcup_{j=1}^n (c_j, d_j)$ y obtenemos:

$$\sum_{j=1}^n |F(d_j) - F(c_j)| = \sum_{j=1}^n \left| \int_{(c_j, d_j)} f \, \mathrm{d}\mu \right| \le \sum_{j=1}^n \int_{(c_j, d_j)} |f| \, \mathrm{d}\mu = \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Proposición (sobre las integrales nulas con límite superior variable)

Sea $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mediante

$$F(x) := \int_{[a,x]} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Supongamos que $F(x) = 0$ para cada x en $[a,b]$. Entonces $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0$.

Proposición (sobre las integrales nulas con límite superior variable)

Sea $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{C})$. Definimos $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mediante

$$F(x) := \int_{[a,x]} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Supongamos que $F(x) = 0$ para cada x en $[a,b]$. Entonces $f \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0$.

Idea de demostración. La condición del lema implica que para cada α, β en $[a,b]$,

$$\int_{[\alpha,\beta]} f \, \mathrm{d}\mu = F(\beta) - F(\alpha) = 0.$$

Cada conjunto medible se puede aproximar por una unión de intervalos.

Demostración, inicio

Primero, suponemos que $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{R})$. Sea

$$E := \{x \in (a,b)\colon\ f(x) > 0\}.$$

La condición $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{R})$ implica que E es medible.

Demostración, inicio

Primero, suponemos que $f \in \mathcal{L}^1([a, b], \mathbb{R})$. Sea

$$E := \{x \in (a, b) \colon f(x) > 0\}.$$

La condición $f \in \mathcal{L}^1([a, b], \mathbb{R})$ implica que E es medible.

Supongamos que $\mu(E) > 0$.

Demostración, inicio

Primero, suponemos que $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{R})$. Sea

$$E := \{x \in (a,b) \colon f(x) > 0\}.$$

La condición $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{R})$ implica que E es medible.

Supongamos que $\mu(E) > 0$.

Usemos el hecho que la medida de Lebesgue es regular por abajo.

Demostración, inicio

Primero, suponemos que $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{R})$. Sea

$$E := \{x \in (a,b) \colon f(x) > 0\}.$$

La condición $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{R})$ implica que E es medible.

Supongamos que $\mu(E) > 0$.

Usemos el hecho que la medida de Lebesgue es regular por abajo.

Elijamos un conjunto compacto K tal que $K \subseteq E$ y $\mu(K) > 0$.

Demostración, continuación

Como $(a, b) \setminus K$ es abierto,

Demostración, continuación

Como $(a, b) \setminus K$ es abierto,

$$(a, b) \setminus K$$

Demostración, continuación

Como $(a, b) \setminus K$ es abierto,

$$(a, b) \setminus K =$$

Demostración, continuación

Como $(a, b) \setminus K$ es abierto,

$$(a, b) \setminus K = \bigcup_{j \in J} (\alpha_j, \beta_j),$$

Demostración, continuación

Como $(a, b) \setminus K$ es abierto,

$$(a, b) \setminus K = \bigcup_{j \in J} (\alpha_j, \beta_j),$$

donde $((\alpha_j, \beta_j))_{j \in J}$ es una familia finita o numerable de intervalos abiertos.

$$(a, b)$$

Demostración, continuación

Como $(a, b) \setminus K$ es abierto,

$$(a, b) \setminus K = \bigcup_{j \in J} (\alpha_j, \beta_j),$$

donde $((\alpha_j, \beta_j))_{j \in J}$ es una familia finita o numerable de intervalos abiertos.

$$(a, b) =$$

Demostración, continuación

Como $(a, b) \setminus K$ es abierto,

$$(a, b) \setminus K = \bigcup_{j \in J} (\alpha_j, \beta_j),$$

donde $((\alpha_j, \beta_j))_{j \in J}$ es una familia finita o numerable de intervalos abiertos.

$$(a, b) = K \cup \left(\bigcup_{j \in J} (\alpha_j, \beta_j) \right).$$

Demostración, continuación

Como $(a, b) \setminus K$ es abierto,

$$(a, b) \setminus K = \bigcup_{j \in J} (\alpha_j, \beta_j),$$

donde $((\alpha_j, \beta_j))_{j \in J}$ es una familia finita o numerable de intervalos abiertos.

$$(a, b) = K \cup \left(\bigcup_{j \in J} (\alpha_j, \beta_j) \right).$$

0

Demostración, continuación

Como $(a, b) \setminus K$ es abierto,

$$(a, b) \setminus K = \bigcup_{j \in J} (\alpha_j, \beta_j),$$

donde $((\alpha_j, \beta_j))_{j \in J}$ es una familia finita o numerable de intervalos abiertos.

$$(a, b) = K \cup \left(\bigcup_{j \in J} (\alpha_j, \beta_j) \right).$$

$$0 =$$

Demostración, continuación

Como $(a, b) \setminus K$ es abierto,

$$(a, b) \setminus K = \bigcup_{j \in J} (\alpha_j, \beta_j),$$

donde $((\alpha_j, \beta_j))_{j \in J}$ es una familia finita o numerable de intervalos abiertos.

$$(a, b) = K \cup \left(\bigcup_{j \in J} (\alpha_j, \beta_j) \right).$$

$$0 = \int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\mu$$

Demostración, continuación

Como $(a,b) \setminus K$ es abierto,

$$(a,b) \setminus K = \bigcup_{j \in J} (\alpha_j, \beta_j),$$

donde $((\alpha_j, \beta_j))_{j \in J}$ es una familia finita o numerable de intervalos abiertos.

$$(a,b) = K \cup \left(\bigcup_{j \in J} (\alpha_j, \beta_j) \right).$$

$$0 = \int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\mu =$$

Demostración, continuación

Como $(a, b) \setminus K$ es abierto,

$$(a, b) \setminus K = \bigcup_{j \in J} (\alpha_j, \beta_j),$$

donde $((\alpha_j, \beta_j))_{j \in J}$ es una familia finita o numerable de intervalos abiertos.

$$(a, b) = K \cup \left(\bigcup_{j \in J} (\alpha_j, \beta_j) \right).$$

$$0 = \int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\mu = \int_K f \, \mathrm{d}\mu + \sum_{j \in J} \int_{(\alpha_j, \beta_j)} f \, \mathrm{d}\mu$$

Demostración, continuación

Como $(a,b)\setminus K$ es abierto,

$$(a,b)\setminus K = \bigcup_{j\in J}(\alpha_j,\beta_j),$$

donde $((\alpha_j,\beta_j))_{j\in J}$ es una familia finita o numerable de intervalos abiertos.

$$(a,b) = K \cup \left(\bigcup_{j\in J}(\alpha_j,\beta_j)\right).$$

$$0 = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\mu = \int_K f\,\mathrm{d}\mu + \sum_{j\in J}\int_{(\alpha_j,\beta_j)} f\,\mathrm{d}\mu =$$

Demostración, continuación

Como $(a, b) \setminus K$ es abierto,

$$(a, b) \setminus K = \bigcup_{j \in J} (\alpha_j, \beta_j),$$

donde $((\alpha_j, \beta_j))_{j \in J}$ es una familia finita o numerable de intervalos abiertos.

$$(a, b) = K \cup \left(\bigcup_{j \in J} (\alpha_j, \beta_j) \right).$$

$$0 = \int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\mu = \int_K f \, \mathrm{d}\mu + \sum_{j \in J} \int_{(\alpha_j, \beta_j)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_K f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración, continuación

Como $(a, b) \setminus K$ es abierto,

$$(a, b) \setminus K = \bigcup_{j \in J} (\alpha_j, \beta_j),$$

donde $((\alpha_j, \beta_j))_{j \in J}$ es una familia finita o numerable de intervalos abiertos.

$$(a, b) = K \cup \left(\bigcup_{j \in J} (\alpha_j, \beta_j) \right).$$

$$0 = \int_{[a,b]} f \, \mathrm{d}\mu = \int_K f \, \mathrm{d}\mu + \sum_{j \in J} \int_{(\alpha_j, \beta_j)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_K f \, \mathrm{d}\mu.$$

Por otro lado, como $f > 0$ en K y $\mu(K) > 0$, tenemos $\int_K f \, \mathrm{d}\mu > 0$.

Esta contradicción muestra que $\mu(E) = 0$.

Demostración, continuación

De manera similar,

$$\mu\left(\left\{x \in [a, b] \colon \; f(x) < 0\right\}\right) = 0.$$

Demostración, final

Consideremos el caso general, cuando $f \in \mathcal{L}^1([a, b], \mathbb{C})$.

Demostración, final

Consideremos el caso general, cuando $f \in \mathcal{L}^1([a, b], \mathbb{C})$.

Pongamos

$$g := \operatorname{Re}(f), \qquad h := \operatorname{Im}(f).$$

Demostración, final

Consideremos el caso general, cuando $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{C})$.

Pongamos

$$g := \operatorname{Re}(f), \qquad h := \operatorname{Im}(f).$$

Entonces, $g, h \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{R})$, $f = g + \mathrm{i}\, h$,

Demostración, final

Consideremos el caso general, cuando $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{C})$.

Pongamos

$$g := \mathrm{Re}(f), \qquad h := \mathrm{Im}(f).$$

Entonces, $g, h \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{R})$, $f = g + \mathrm{i}\, h$,

$$\underbrace{\int_{[0,x]} f \,\mathrm{d}\mu}_{F(x)} = \underbrace{\int_{[0,x]} g \,\mathrm{d}\mu}_{G(x)} + \mathrm{i} \underbrace{\int_{[0,x]} h \,\mathrm{d}\mu}_{H(x)}.$$

Demostración, final

Consideremos el caso general, cuando $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{C})$.

Pongamos

$$g := \operatorname{Re}(f), \qquad h := \operatorname{Im}(f).$$

Entonces, $g, h \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{R})$, $f = g + \mathrm{i}\,h$,

$$\underbrace{\int_{[0,x]} f \,\mathrm{d}\mu}_{F(x)} = \underbrace{\int_{[0,x]} g \,\mathrm{d}\mu}_{G(x)} + \mathrm{i} \underbrace{\int_{[0,x]} h \,\mathrm{d}\mu}_{H(x)}.$$

Como $G = 0$ y $H = 0$, concluimos que $g \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0$, $h \xlongequal{\mu\text{-c.t.p.}} 0$.