Los enteros como un grupo localmente compacto: medida invariante y caracteres

Objetivos. Recordar que los números enteros forman un grupo conmutativo localmente compacto y que la medida de conteo es invariante bajo traslaciones. Demostrar que el grupo dual de $\mathbb{Z}$ se puede identificar con el grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$, el cual está definido como el grupo cociente $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ y es isomorfo a $\mathbb{T}$.

Medida de Haar en $\mathbb{Z}$

Observación 1. El conjunto $\mathbb{Z}$ con la operación de adición es un grupo conmutativo. Este grupo se puede generar por un elemento (por 1 o por -1), así que $\mathbb{Z}$ es un grupo cíclico. Además, es infinito. De hecho, cada grupo cíclico infinito es isomorfo a $\mathbb{Z}$. La topología natural en $\mathbb{Z}$ es la topología discreta.

Observación 2. Cualquier subconjunto A de $\mathbb{Z}$ es abierto (y al mismo tiempo cerrado) y por lo tanto pertenece a la σ-álgebra de Borel. La *medida de conteo* $\nu\colon 2^{\mathbb{Z}} \to [0, +\infty]$ se define mediante la siguiente regla:

$$\nu(A) \coloneqq \begin{cases} \#A, & \text{si } A \text{ es finito;} \\ +\infty, & \text{si } A \text{ es infinito;} \end{cases} \qquad (A \subseteq \mathbb{Z}).$$

Se puede demostrar que ν es invariante bajo traslaciones, esto es,

$$\forall A \in 2^{\mathbb{Z}} \qquad \forall b \in \mathbb{Z} \qquad \nu(A+b) = \nu(A).$$

Caracteres del grupo $\mathbb{Z}$

Observación 3 (grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$, repaso)**.** Recordemos que $2\pi\mathbb{Z}$ es un subgrupo del grupo conmutativo $\mathbb{R}$. Dos números reales x, y se llaman *congruentes módulo* 2π si existe un k en $\mathbb{Z}$ tal que $x - y = 2\pi k$. Esta relación binaria es una relación de equivalencia. La clase de equivalencia de un número real x se puede escribir como $x + 2\pi\mathbb{Z}$. El conjunto de estas clases de equivalencia se denota por $\mathbb{R}_{2\pi}$. Recordemos la definición de la suma de dos conjuntos:

$$A + B \coloneqq \{c \in \mathbb{R} \colon \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad c = a + b\}.$$

En el caso de dos elementos de $\mathbb{R}_{2\pi}$, su suma se puede expresar de otra manera: es suficiente elegir algunos representantes de cada clase, sumarlas y formar la clase de equivalencia de la suma. En otras palabras, para cualesquier a, b en $\mathbb{R}$,

$$(a + 2\pi\mathbb{Z}) + (b + 2\pi\mathbb{Z}) = (a + b) + 2\pi\mathbb{Z}.$$

El conjunto $\mathbb{R}_{2\pi}$ dotado de esta operación es un grupo conmutativo.

Observación 4 (circunferencia unitaria)**.** Denotemos por $\mathbb{T}$ a la circunferencia unitaria en el plano complejo:

$$\mathbb{T} \coloneqq \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}.$$

El conjunto $\mathbb{T}$ se considera con la operación de multiplicación de números complejos y es un grupo conmutativo con respecto a esta operación.

Observación 5 (isomorfía entre los grupos $\mathbb{R}_{2\pi}$ y $\mathbb{T}$)**.** Se puede demostrar que los grupos $\mathbb{R}_{2\pi}$ y $\mathbb{T}$ son isomorfos: la función $x + 2\pi\mathbb{Z} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ está bien definida y es un isomorfismo entre estos grupos.

Definición 6 (los caracteres de un grupo conmutativo localmente compacto)**.** Sea G un grupo conmutativo localmente compacto. Un *caracter* de G es homomorfismo continuo $G \to \mathbb{T}$.

Definición 7 (el grupo dual de un grupo conmutativo localmente compacto)**.** Sea G un grupo conmutativo localmente compacto. Es *grupo dual* de G, denotado por $\widehat{G}$, es el conjunto de todos los caracteres de G, dotado de la multiplicación por componentes:

$$(\alpha\beta)(g) \coloneqq \alpha(g)\beta(g) \qquad (g \in G,\ \alpha, \beta \in \widehat{G}).$$

Es fácil ver que $\widehat{G}$ es un grupo conmutativo. Además, en $\widehat{G}$ se define de cierta manera una topología, con la cual $\widehat{G}$ es un grupo conmutativo localmente compacto.

Lema 8. *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$, y sea $k \in \mathbb{Z}$. Entonces*

$$\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} = \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,y}.$$

Demostración. El resultado sale directamente de propiedades conocidas de la función exponencial:

$$\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^{z}\,\mathrm{e}^{w}, \qquad \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}} = 1, \qquad (\mathrm{e}^{z})^{k} = \mathrm{e}^{kz}.$$

En nuestro caso, la condición $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$ significa que existe un entero m tal que $x - y = 2\pi m$. Luego

$$\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} = \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}(y+2\pi m)} = \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{e}^{2\pi k m\,\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,y}(\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}})^{km} = \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,y}. \qquad \square$$

Definición 9 (el caracter del grupo $\mathbb{Z}$ asociado a un elemento de $\mathbb{R}_{2\pi}$)**.** Sea $A \in \mathbb{R}_{2\pi}$. Definimos $\psi_A\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ mediante la regla

$$\psi_A(k) \coloneqq \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x},$$

donde x es un elemento de A. En otras palabras,

$$\psi_{x+2\pi\mathbb{Z}}(k) \coloneqq \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}.$$

El Lema 8 muestra que esta definición es consistente, en el sentido que al elegir otro elemento y de la clase A, las expresiones $\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}$ y $\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,y}$ son iguales.

Proposición 10. *Sea $A \in \mathbb{R}_{2\pi}$. Entonces, ψ_A es un caracter del grupo $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Sea $x \in A$. Verifiquemos que ψ_A es un homomorfismo $\mathbb{Z} \to \mathbb{T}$. Si $j, k \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\psi_A(j+k) = \mathrm{e}^{(j+k)\,\mathrm{i}\,x} = \mathrm{e}^{j\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} = \psi_A(j)\psi_A(k).$$

Además, ψ_A es una función continua porque la topología de $\mathbb{Z}$ es discreta, y para cualquier subconjunto B de $\mathbb{T}$, su preimagen $\psi_A^{-1}(B)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{Z}$. □

Teorema 11 (isormofismo entre $\mathbb{R}_{2\pi}$ y el grupo dual de $\mathbb{Z}$)**.** *Definamos $\Psi\colon \mathbb{R}_{2\pi} \to \widehat{\mathbb{Z}}$ mediante la siguiente regla:*

$$\Psi(A) \coloneqq \psi_A,$$

esto es,

$$\Psi(x + 2\pi\mathbb{Z})(k) \coloneqq \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}.$$

Entonces, Ψ es un isomorfismo de grupos.

Demostración. 1. Verifiquemos que Ψ es un homomorfismo. Sean $A, B \in \mathbb{R}_{2\pi}$, $x \in A$, $y \in B$. Entonces, $x + y \in A + B$ y

$$\psi_{A+B}(k) = \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,y} = \psi_A(k)\psi_B(k),$$

lo cual significa que $\Psi(A+B) = \Psi(A)\Psi(B)$.

2. Verifiquemos que el homomorfismo Ψ es inyectivo. Supongamos que $A \in \mathbb{R}_{2\pi}$ tal que $\Psi(A)$ es la constante 1. Elegimos algún x en A. Entonces $\Psi(A)(1) = 1$, esto es, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} = 1$. Se sabe que en esta situación x debe ser un múltiplo de 2π, por lo cual $A = x + 2\pi\mathbb{Z} = 2\pi\mathbb{Z}$, es decir, A es el elemento neutro del grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$.

3. Demostremos que el homomorfismo Ψ es suprayectivo. Es la parte más interesante de la demostración. La idea clave es usar el hecho que $\mathbb{Z}$ es un grupo cíclico, generado por su elemento 1. Sea $\gamma \in \widehat{\mathbb{Z}}$. Entonces $\gamma(1) \in \mathbb{T}$, y existe un número x en $\mathbb{R}$ tal que

$$\gamma(1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}.$$

Se demuestra por inducción sobre k que

$$\gamma(k) = \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

De la identidad $\gamma(k)\gamma(-k) = 1$ sale que

$$\gamma(-k) = \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x} \qquad (k \in \mathbb{N}_0),$$

así que

$$\gamma(k) = \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x} = \psi_{x+2\pi\mathbb{Z}}(k)$$

para cada k en $\mathbb{Z}$. Hemos demostrado que $\gamma = \Psi(x + 2\pi\mathbb{Z})$. □