Funciones definidas por integrales
(integrales dependientes de un parámetro)

1. Funciones de dos argumentos y fijación de un argumento. Sea $f\colon X\times Y\to\mathbb{C}$ una función de dos argumentos. Para cada elemento x fijo en X podemos considerar la función

$$f_x\colon Y\to\mathbb{C},\qquad f_x(y):=f(x,y).$$

Para cada elemento y fijo en Y podemos considerar la función

$$f^y\colon X\to\mathbb{C},\qquad f^y(x)=f(x,y).$$

2. Funciones definidas por integrales. Sean $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida, Y un espacio métrico, $f\colon X\times Y\to\mathbb{C}$ una función. Suponemos que para cada y en Y la función f^y es integrable, i.e. f^y es medible y

$$\int\limits_X |f(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(x)<+\infty.$$

Entonces para cada y en Y está bien definida la integral

$$\int\limits_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

El valor de esta integral depende de y. Definimos la función $\Phi\colon Y\to\mathbb{C}$ por

$$\boxed{\Phi(y):=\int\limits_X f(x,\lambda)\,\mathrm{d}\mu(x).}$$

3. Objetivos. Nuestro primer objetivo es encontrar condiciones suficientes para que Φ sea una función continua. Después vamos establecer condiciones suficientes para que Φ sea una función derivable, y probamos una fórmula para su derivada (la regla de Leibniz).

Herramientas principales

Recordemos algunos teoremas importantes que serán nuestras herramientas principales en este tema.

4. Teorema de la convergencia dominada (de Lebesgue). Sean $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C})$, $g\in\mathcal{M}(X,\mathcal{F},\mathbb{C})$, $f_n\xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$. Supóngase que existe h en $L^1(X,\mathcal{F},\mu,[0,+\infty])$ tal que $|f_n(x)|\le h(x)$ para casi todos x en X y todo n en $\mathbb{N}$. Entonces las funciones f_n y g son integrables, y

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu=\int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

5. Criterio de continuidad en términos de sucesiones (teorema de Heine). Sean X, Y espacios métricos, $f\colon X \to Y$, $x_0 \in X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es continua en el punto x_0;

(b) para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Continuidad de la función definida por una integral

6. Teorema (continuidad de la función definida por una integral). Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, Y un espacio métrico, $y_0 \in Y$, $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$ una función que cumple con las siguientes condiciones:

- $\forall y \in Y$ la función f^y es de clase $L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$;
- para μ-casi todo x en X, la función f_x es continua en el punto y_0.
- existe una función g en $L^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$ tal que $|f(x, y)| \le g(x)$ para todos y en Y y casi todos x en X.

Entonces la función $\Phi\colon Y \to \mathbb{C}$, definida por

$$\Phi(y) \coloneqq \int\limits_X f(x, y)\, \mathrm{d}\mu(x), \tag{1}$$

es continua en el punto y_0.

Demostración. Usemos el criterio de Heine. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y convergente a y_0. Tenemos que demostrar que la sucesión $(\Phi(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\Phi(y_0)$. Consideremos las funciones $u_n \coloneqq f^{y_n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, esto es,

$$u_n(x) \coloneqq f(x, y_n).$$

Las condiciones del teorema implican que $u_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} u_0$ y $|u_n| \le g$ casi en todas partes. Por el teorema de la convergencia dominada,

$$\int\limits_X u_0\, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X u_n\, \mathrm{d}\mu,$$

esto es,

$$\Phi(y_0) = \lim_{n\to\infty} \Phi(y_n). \qquad \square$$

7. Corolario. Sean Y un espacio métrico compacto, K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y $f\colon K\times Y\to\mathbb{C}$ una función continua en $K\times Y$. Entonces la función $\Phi\colon Y\to\mathbb{C}$ definida por (1) es continua en Y.

8. Tarea. Generalizar el corolario al caso cuando Y es un espacio métrico arbitrario, no necesariamente compacto. Se recomienda demostrar y usar la siguiente afirmación. Sean X un espacio métrico compacto, Y un espacio métrico, $f\colon X\times Y\to\mathbb{C}$ una función continua. Entonces

$$\forall y_0\in Y\quad \forall\varepsilon>0\quad \exists V\in\mathfrak{U}_{y_0}\quad \forall x\in X\quad \forall y\in V\quad |f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon.$$

Aquí denotamos por $\mathfrak{U}_{y_0}$ al conjunto de las vecindades abiertas de y_0.

9. Ejemplo (potencial creado en un punto por una carga de densidad dada). Sean K un compacto de $\mathbb{R}^3$ y p una función real, medible y acotada en K. Entonces la función $U\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, definida por

$$U(a)\coloneqq\int\limits_K\frac{p(x)\,\mathrm{d}x}{|x-a|},$$

es continua en $\mathbb{R}^3\setminus K$. Se recomienda demostrar que para todo $\delta>0$ la función U es continua en

$$S_\delta\coloneqq\{x\in\mathbb{R}^3\colon\ \ \operatorname{dist}(a,K)\geq\delta\},$$

donde $\operatorname{dist}(a,K)\coloneqq\inf\{|a-b|\colon b\in K\}$.

10. Ejemplo (transformada de Fourier). Sea $f\in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. La función $\widehat{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, definida por

$$\widehat{f}(u)\coloneqq\int\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,xu}\,f(x)\,\mathrm{d}x,$$

se llama la *transformada de Fourier* de f. Demostrar que $\widehat{f}$ es continua en $\mathbb{R}$.

11. Ejemplo (la función Γ). Demostremos que la función Γ de Euler, definida por

$$\Gamma(x)\coloneqq\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t\qquad\forall x>0,$$

es continua en $(0,+\infty)$. Es suficiente mostrar que Γ es continua en cada intervalo de la forma (a,b), donde $0<a<b<+\infty$, porque cada punto $(0,+\infty)$ pertenece a un intervalo (a,b). Sean $a,b\in\mathbb{R}$ tales que $0<a<b$. Definimos $f\colon(0,+\infty)\times(a,b)\to\mathbb{R}$, $g\colon(0,+\infty)\to[0,+\infty)$ mediante las siguientes reglas:

$$f(t,x)\coloneqq\mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1},\qquad g(t)\coloneqq\begin{cases}\mathrm{e}^{-t}\,t^{a-1}, & 0<t\leq 1;\\ \mathrm{e}^{-t}\,t^{b-1}, & t>1.\end{cases}$$

Para cada t en $(0,+\infty)$, la función f_t es continua. Si $t \in (0,1]$ y $x \in (a,b)$, entonces $t^{x-1} \le t^{a-1}$. Si $t \in (1,+\infty)$ y $x \in (a,b)$, entonces $t^{x-1} \le t^{b-1}$. Luego para cada t en $(0,+\infty)$ y cada x en (a,b) se cumple la desigualdad

$$|f(t,x)| \le g(t).$$

Probemos que g es integrable.

$$\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,t^{a-1}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,t^{b-1}\,\mathrm{d}t.$$

En el primer sumando usamos la cota superior $\mathrm{e}^{-t} \le 1$. Como $a-1 > -1$, la integral $\int_0^1 t^{a-1}\,\mathrm{d}t$ es finita. Para demostrar que el segundo sumando es finito, notamos que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{b-1}}{\mathrm{e}^{t/2}} = 0.$$

Luego existe una constante $C > 0$ tal que para cada t en $[1,+\infty)$ se tiene la desigualdad

$$t^{b-1} \le C\,\mathrm{e}^{t/2}.$$

Por eso

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,t^{b-1}\,\mathrm{d}t \le \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Ahora podemos aplicar el Teorema 6 y obtener la continuidad de la función Γ.