Derivación bajo el signo integral (regla de Leibniz)

Seguimos usando la notación del tema anterior. Si $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$, $x \in X$, entonces f_x es la función $y \mapsto f(x, y)$, y f'_x es su derivada, es decir, la derivada de f respecto al segundo argumento, cuando el primer argumento es fijo y es igual a x. Algunos autores en vez de $f'_x(y)$ escribirían $D_2 f(x, y)$ o $\partial_2 f(x, y)$, y en la notación antigua es $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

1. Teorema (derivación bajo el signo integral, regla de Leibniz). Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, Y un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$. Se supone que f tiene las siguientes propiedades:

(i) $\forall y \in Y$, $f^y \in L^1(X, \mu)$. Definimos

$$\Phi(y) \coloneqq \int_X f^y \,\mathrm{d}\mu = \int_X f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

(ii) para casi todo x en X, la función f_x es derivable.

(iii) $\exists g \in L^1(X, \mu)$ tal que $|f'_x(y)| \le g(x)$ para casi todo $x \in X$ y $\forall \lambda \in Y$.

Entonces para cada y en Y la función $x \mapsto f'_x(y)$ es integrable en X, Φ es derivable en Y y

$$\Phi'(y) = \int_X f'_x(y) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Demostración. Sea $z \in Y$ y sea $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $Y \setminus \{z\}$ que converge a z. Para cada n en $\mathbb{N}$ definimos $q_n\colon X \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$q_n(x) \coloneqq \frac{f(x, y_n) - f(x, z)}{y_n - z} = \frac{f_x(y_n) - f_x(z)}{y_n - z}.$$

Por el teorema del valor medio, $q_n(x)$ se puede ver como $f'_x(c)$, donde c es algún punto intermedio entre y_n y z (este punto puede depender de x). Usando la suposición (iii) concluimos que para casi todo x en X se cumple la desigualdad

$$|q_n(x)| \le g(x).$$

Además, por la suposición (ii), $q_n(x) \to f'_x(z)$ para casi todo x. Aplicamos el teorema de la convergencia dominada. Concluimos que la función $x \mapsto f'_x(z)$ es integrable y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X q_n(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X f'_x(z) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

El lado izquierdo se puede escribir como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(y_n) - \Phi(z)}{y_n - z}.$$

Por el criterio de Heine obtenemos el resultado. □

2. Corolario. Cambiamos la hipótesis (ii) del teorema por la siguiente:
(ii') para casi todo x en X, $f_x \in C^1(Y)$.
Entonces $\Phi \in C^1(Y)$.

Idea de demostración. Aplicar el Teorema 1, luego el teorema sobre la integral de una función continua (del tema anterior). $\square$

3. Corolario. Sean X un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, Y un intervalo compacto de $\mathbb{R}$, $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$. Se supone:

(i) $\forall y \in Y$, $f^y \in L^1(X)$. Definimos

$$\Phi(y) \coloneqq \int\limits_X f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) la función $(x,y) \mapsto f_x'(y)$ existe y es continua en $X \times Y$.

Entonces $\Phi \in C^1(Y)$ y

$$\Phi'(y) = \int\limits_X f_x'(y)\,\mathrm{d}x.$$

Idea de demostración. Gracias a la compacidad, la función del inciso (ii) es acotada. $\square$

4. Ejercicio para atacar en casa (la regla de Leibniz con límites de integración variables). Sean X, Y intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ y sea $f \in C(X \times Y, \mathbb{C})$. Se supone que $\forall (x,y) \in X \times Y$ existe $D_2 f(x,y)$ y que existe $g \in L^1(X, [0,+\infty])$ tal que $|D_2 f(x,y)| \le g(x)$ $\forall (x,y) \in X \times Y$. Sean φ, ψ funciones derivables $Y \to X$. Se define $\Phi\colon Y \to \mathbb{C}$ mediante la siguiente regla:

$$\Phi(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

Pruebe que Φ es derivable en Y y calcule su derivada.

5. Ejercicio para resolver en casa (derivadas sucesivas de la función Γ). Recordar la definición de la función Γ, demostrar que $\Gamma \in C^\infty((0,+\infty))$ y

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^k\,\mathrm{d}t.$$

6. Propiedades de la función Γ (vamos a demostrarlas poco a poco). Demostrar que Γ tiene las siguientes propiedades:

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \forall x > 0$.
2. $\Gamma(1) = 1$.
3. $\Gamma(n+1) = n!$.
4. $\Gamma''(x) > 0 \quad \forall x > 0$.
5. $\exists \alpha \in (1,2)$ tal que $\Gamma'(\alpha) = 0$.
   El cálculo numérico dice que $\alpha \approx 1.4616$, $\Gamma(\alpha) \approx 0.8866$.
6. $\Gamma(x) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$.
7. $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ cuando $x \to 0^+$, es decir,
$$\lim_{x\to 0^+} (x\,\Gamma(x)) = 1.$$

7. Sea S un subconjunto medible en $\mathbb{R}^n$. Sean $f\colon S \to \mathbb{C}$, $g\colon S \to \mathbb{R}$ funciones medibles en S. Se supone que $g(x) > 0$ para cada x en S y que existe $\lambda_0 > 0$ tal que la función $x \mapsto e^{-\lambda_0 g(x)} f(x)$ es integrable en S. Para cada $\lambda > \lambda_0$ se pone

$$\Phi(\lambda) := \int_S e^{-\lambda g(x)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Muestre que Φ está bien definida, que $\Phi \in C^\infty((\lambda_0, +\infty))$ y que $\forall k \in \mathbb{N}$ y $\forall \lambda > \lambda_0$

$$\Phi^{(k)}(\lambda) = (-1)^k \int_S e^{-\lambda g(x)} (g(x))^k f(x)\,dx.$$

Aplicación: Para $\lambda > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcule la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^k\,dx$.

8. Ejercicio (se puede atacar en clase). Para todo x en $\mathbb{R}$ se definen

$$f(x) := \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2, \qquad g(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Demuestre que para cada x en $\mathbb{R}$ se cumple la igualdad $f'(x) + g'(x) = 0$ y deduzca que $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$. Utilice este resultado para calcular la integral de Poisson:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

9. Ejercicio. Sea $\alpha \geq 0$. Muestre que la función $x \mapsto \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2}$ es integrable en $[0, +\infty)$. Pongamos

$$F(\alpha) \coloneqq \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2} dx.$$

Muestre que F es continua en $[0, +\infty)$. Pruebe que para $\alpha > 0$ se puede derivar F bajo el signo integral. Efectuando esta derivación calcule explícitamente $F(\alpha)$.

10. Ejercicio. Fijando $a > 0$ se pone

$$f(b) \coloneqq \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx \qquad \forall b \geq 0.$$

Establezca la relación

$$f'(b) = -\frac{b}{2a} f(b).$$

Deduzca que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.}$$