Derivación de funciones definidas por integrales impropias

Recordemos el teorema clásico sobre la derivación de sucesiones de funciones.

1. Teorema. Sea A un intervalo finito de $\mathbb{R}$, $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $A \to \mathbb{C}$, derivables en todo punto de A. Supongamos lo siguiente:

i) existe $x_0 \in A$ tal que la sucesión $(f_\nu(x_0))_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge;

ii) la sucesión $(f'_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en A a cierta función $h\colon A \to \mathbb{C}$.

Entonces la sucesión $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en A a una función $g\colon A \to \mathbb{C}$, y se tiene $g'(x) = h(x)$ para cada x en A.

Idea de demostración. 1. Supongamos que $A \subseteq (a, b)$. Sea $\varepsilon > 0$. Encontramos k en $\mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $m, n \geq k$

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$|f'_m(t) - f'_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (t \in A).$$

Apliquemos el teorema del valor medio a la función $f_m - f_n$:

$$|f_m(x) - f_n(x) - f_m(t) + f_n(t)| \leq \frac{|x-t|\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{1}$$

En particular, de lo anterior,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Luego la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en A. Denotemos la función límite por g.

2. Fijemos x en A y pongamos

$$\varphi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \qquad \psi(t) = \frac{g(t) - g(x)}{t - x}.$$

Como f_n converge a g, concluimos que φ_n converge a ψ. Entonces $\lim_{t\to x} \varphi_n(t) = f'_n(x)$. De (1),

$$|\varphi_m(t) - \varphi_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Luego $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ψ uniformemente en $A \setminus \{x\}$. Usando el teorema sobre el intercambio de límites, concluimos que $g' = h$. □

2. Teorema. Sea Y un intervalo finito de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon (a,b)\times Y \to \mathbb{C}$. Se supone lo siguiente.

i) Para cada t en (a,b) y cada y en Y, la función $x \mapsto f(x,y)$ es integrable en (a,t); Se pone: $\varphi_t(y) \coloneqq \int_a^t f(x,y)\mathrm{d}x$.

ii) Para casi todo x en (a,b) y todo y en Y, existe la derivada $f_x'(y)$.

iii) Para cada t en (a,b) y cada y en Y se tiene que

$$\varphi_t'(y) = \int\limits_a^t f_x'(y)\,\mathrm{d}x.$$

Esta condición se cumple, en particular, si para cada t en (a,b) existe una función $h_t \in L^1((a,t))$ tal que $|f_x'(y)| \le h_t(x)$ para casi todo x en (a,t) y todo y en Y.

iv) Existe y_0 en Y tal que la integral impropia $\int_a^{\to b} f(x,y_0)\,\mathrm{d}x$ es convergente.

v) La integral impropia $\int_a^{\to b} f_x'(y)\,\mathrm{d}x$ es uniformemente convergente en Y.

Entonces la integral impropia $\int_a^{\to b} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ es uniformemente convergente en Y, y al poner

$$\Phi(y) \coloneqq \int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,\mathrm{d}x \qquad (y \in Y),$$

se tiene que

$$\Phi'(y) = \int\limits_a^{\to b} f_x'(y)\,\mathrm{d}x \qquad (y \in Y).$$

Demostración. Sea $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de (a,b) tal que $\lim_{\nu\to\infty} u_\nu = b$. Para cada ν en $\mathbb{N}$ y cada y en Y, pongamos

$$\psi_\nu(y) \coloneqq \varphi_{u_\nu}(y) = \int\limits_a^{u_\nu} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Aplicamos el teorema anterior a la sucesión $(\psi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$. $\square$