Algunos teoremas importantes de la teoría de la integral de Lebesgue (repaso)

Suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida. Denotamos por $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)$ al conjunto de todas las funciones $\mathcal{F}$-medibles con valores en Y, donde Y puede ser $[0, +\infty]$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

1. Lema de Fatou. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

2. Teorema de la convergencia monótona (de Lebesgue). Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tal que para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple la desigualdad $f_n \le f_{n+1}$. Denotemos por g a la función límite:

$$g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Entonces $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

3. Teorema de la convergencia dominada (de Lebesgue). Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que para μ-casi todo x en X existe un límite finito de la sucesión numérica $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Denotemos este límite por $g(x)$. Además, supongamos que existe una función h en $L^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty])$ tal que μ-c.t.p. se cumple la desigualdad $|f(x)| \le h(x)$. Entonces las funciones f_n y g son de clase $L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

4. Un ejemplo cuando no se tiene la convergencia de integrales. La condición que f_n son “dominadas” por una función integrable h es importante. Considerar

$$f_n(x) = n 1_{[0,1/n]}(x) = \begin{cases} n, & x \in [0, 1/n]; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1/n]. \end{cases}$$

5. Teorema. Para todo $p \in [1, +\infty]$, el espacio $L^p(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ es completo.

6. Teorema de Tonelli. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medidas σ-finitas y sea $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mu \times \nu, [0, +\infty])$. Entonces

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) = \int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \times \nu).$$

7. Teorema de Fubini. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espacios de medidas σ-finitas y sea $f \in L^1(X, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mu \times \nu, \mathbb{C})$, esto es, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathbb{C})$ y

$$\int\limits_{X \times Y} |f| \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) < +\infty.$$

Entonces

$$\int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) = \int\limits_{X \times Y} f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu).$$