Productos internos y sus propiedades elementales

1 Ejemplo (el producto punto en $\mathbb{C}^n$)**.** Consideramos el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^n$ y la función $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ definida mediante la siguiente regla:

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$

Esta función se llama el *producto punto* en $\mathbb{C}^n$.

Generalizando las propiedades del producto punto en $\mathbb{C}^n$ y de muchos otros ejemplos (que vamos a conocer a continuación) llegamos al siguiente concepto.

2 Definición. Sea H un espacio vectorial complejo. Sea $p\colon H \times H \to \mathbb{C}$. Se dice que que esta función $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un *producto interno* en H, si se cumplen las siguientes propiedades.

(PI1) La propiedad aditiva respecto al primer argumento. Para cualesquiera vectores u, v, w en H,
$$p(u + v, w) = p(u, w) + p(v, w).$$

(PI2) La propiedad homogénea respecto al primer argumento. Para cualquier α en $\mathbb{C}$ y cualesquiera u, v en H,
$$p(\alpha u, v) = \alpha p(u, v).$$

(PI3) La propiedad conjugada simétrica (hermítica). Para cualesquiera u, v en H,
$$p(u, v) = \overline{p(v, u)}.$$

(PI4) La propiedad de ser positivo definido. Para cualquier u en $H \setminus \{0_H\}$,
$$p(u, u) > 0.$$

3 Observación. Por lo común, cuando en un espacio vectorial complejo está elegido un producto interno, se usa la notación $\langle u, v\rangle$ en vez de $p(u, v)$. Vamos a usar esta notación. En esta notación, las propiedades de la definición se escriben así:

(PI1) La propiedad aditiva respecto al primer argumento. Para cualesquiera vectores u, v, w en H,
$$\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle.$$

(PI2) La propiedad homogénea respecto al primer argumento. Para cualquier α en $\mathbb{C}$ y cualesquiera u, v en H,

$$\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle.$$

(PI3) La propiedad conjugada simétrica (hermítica). Para cualesquiera u, v en H,

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}.$$

(PI4) La propiedad de ser positivo definido. Para cualquier u en $H \setminus \{0_H\}$,

$$\langle u, u\rangle > 0.$$

4 Proposición. *El producto interno es aditivo y homogéneo conjugado respecto al segundo argumento:*

$$\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle, \tag{1}$$

$$\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle. \tag{2}$$

Demostración. Sale fácilmente de (PI1), (PI2) y (PI3), y de las propiedades elementales de la conjugación compleja. En efecto,

$$\langle x, y+z\rangle \overset{\text{(PI3)}}{=\!=} \overline{\langle y+z, x\rangle} \overset{\text{(PI1)}}{=\!=} \overline{\langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle z, x\rangle} \overset{\text{(PI3)}}{=\!=} \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle,$$

$$\langle x, \alpha y\rangle \overset{\text{(PI3)}}{=\!=} \overline{\langle \alpha y, x\rangle} \overset{\text{(PI2)}}{=\!=} \overline{\alpha\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\,\overline{\langle y, x\rangle} \overset{\text{(PI3)}}{=\!=} \overline{\alpha}\langle x, y\rangle. \qquad \square$$

5 Proposición. *Una función $p\colon H \times H \to \mathbb{C}$ es un producto interno si, y sólo si, es una forma sesquilineal, conjugada simétrica y positiva definida.*

Demostración. Ya hemos demostrado la necesidad. La suficiencia es trivial. $\square$

Consecuencias directas de la propiedad lineal y de la propiedad lineal conjugada

En la propiedad lineal respecto al primer argumento podemos admitir un número arbitrario (finito) de sumandos, y de manera similar en la propiedad lineal conjugada respecto al segundo argumento. Ya lo hemos visto para las formas sesquilineales; en particular, lo tenemos los productos internos.

6 Proposición. *Para cada m en $\mathbb{N}$, cada $u_1, \ldots, u_m$ en H, cada $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ en $\mathbb{C}$ y cada v en H,*

$$\left\langle \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j, v \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \langle u_j, v \rangle.$$

Demostración. Se sigue fácilmente de (PI1) y (PI2), usando la inducción matemática. □

7 Proposición. *Para cada n en $\mathbb{N}$, cada u en H, cada $v_1, \ldots, v_n$ en H y cada $\beta_1, \ldots, \beta_n$ en $\mathbb{C}$,*

$$\left\langle u, \sum_{k=1}^{n} \beta_j v_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\beta_k} \langle u, v_k \rangle.$$

Demostración. Se sigue fácilmente de (1) y (2), usando la inducción matemática. □

8 Corolario.

$$\left\langle \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j, \sum_{k=1}^{n} \beta_k v_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta_k} \langle u_j, v_k \rangle.$$

9 Proposición. *Sea $v \in H$. Entonces*

$$\langle 0_H, v \rangle = 0.$$

Primera demostración. Sea $\alpha = \langle 0_H, v \rangle$. Escribimos 0_H como $0_H + 0_H$ y aplicamos la propiedad aditiva respecto al primer argumento:

$$\alpha = \langle 0_H, v \rangle = \langle 0_H + 0_H, v \rangle = \langle 0_H, v \rangle + \langle 0_H, v \rangle = 2\alpha.$$

Hemos mostrado que $\alpha = 2\alpha$. Luego $\alpha = 0$. □

Segunda demostración.

$$\langle 0_H, v \rangle = \langle 0\, 0_H, v \rangle = 0\, \langle 0_H, v \rangle = 0.$$

□

10 Proposición. *Sea $u \in H$. Entonces*

$$\langle u, 0_H \rangle = 0.$$

Demostración. Similar a la proposición anterior. □

El complemento ortogonal de un conjunto (la definición y las propiedades elementales)

Suponemos que H un espacio vectorial complejo con un producto interno. Denotamos el producto interno por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

11 Definición. Sean $u, v \in H$. Se dice que u, v son *ortogonales* y se escribe $u \perp v$, si $\langle u, v \rangle = 0$.

12 Proposición. *La relación $\perp$ es simétrica.*

Demostración. En efecto, si $\langle u, v \rangle = 0$, entonces $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle} = 0$. □

13 Proposición. *Sea $a \in H$ tal que $a \perp a$. Entonces $a = 0_H$.*

Demostración. Se sigue de (PI4). En efecto, si $a \neq 0_H$, entonces $\langle a, a \rangle > 0$. □

14 Definición. Sean $u \in H$, $Y \subseteq H$. Se dice que u, Y son ortogonales y se escribe $u \perp Y$, si

$$\forall v \in Y \qquad u \perp v.$$

15 Definición. Sean $X, Y \subseteq\in H$. Se dice que X, Y son ortogonales y se escribe $X \perp Y$, si

$$\forall u \in X \quad \forall v \in Y \qquad u \perp v.$$

16 Definición. Sea $X \subseteq H$. Se define *el complemento ortogonal de* X de la siguiente manera:

$$X^\perp := \big\{ u \in H \colon \quad u \perp X \big\}.$$

17 Proposición. *Sean $X, Y \subseteq H$ tales que $X \subseteq Y$. Entonces*

$$Y^\perp \subseteq X^\perp.$$

18 Proposición. *Sea $X \subseteq H$. Entonces $X^\perp$ es un subespacio vectorial de H.*

19 Proposición. *Sea $X \subseteq H$. Denotemos por W al subespacio generado por X. Entonces*

$$X^\perp = W^\perp.$$