

Propiedad inyectiva de los coeficientes de Fourier

Egor Maximenko

ESFM del IPN

18 de mayo de 2026

Objetivos

Demostrar que la correspondencia entre las funciones 2π -periódicas integrables y sus coeficientes de Fourier es inyectiva.

Notación

- $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$:= el espacio de clases de equivalencia de funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue medibles, 2π -periódicas e integrables en \mathbb{R} .
- Coeficientes de Fourier de una función f de clase $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$:

$$\hat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi)} f(x) e^{-ikx} d\mu(x).$$

- $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$:= el espacio de todas las funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continuas y 2π -periódicas.
- $C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:= el espacio de todas las funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y 2π -periódicas.

Lema

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, tal que $\hat{f}_k = 0$ para cada k en \mathbb{Z} . Entonces

$$f(0) \neq 1.$$

Demostración, inicio

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $f(0) = 1$.

Demostración, inicio

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $f(0) = 1$.

Como f es continua, existe $\delta \in (0, \pi)$ tal que

$$\forall x \in [-\delta, \delta] \quad f(x) \geq \frac{1}{2}.$$

Demostración, inicio

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $f(0) = 1$.

Como f es continua, existe $\delta \in (0, \pi)$ tal que

$$\forall x \in [-\delta, \delta] \quad f(x) \geq \frac{1}{2}.$$

Sea $A := [-\delta, \delta]$,

Demostración, inicio

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $f(0) = 1$.

Como f es continua, existe $\delta \in (0, \pi)$ tal que

$$\forall x \in [-\delta, \delta] \quad f(x) \geq \frac{1}{2}.$$

Sea $A := [-\delta, \delta]$,

Definimos $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

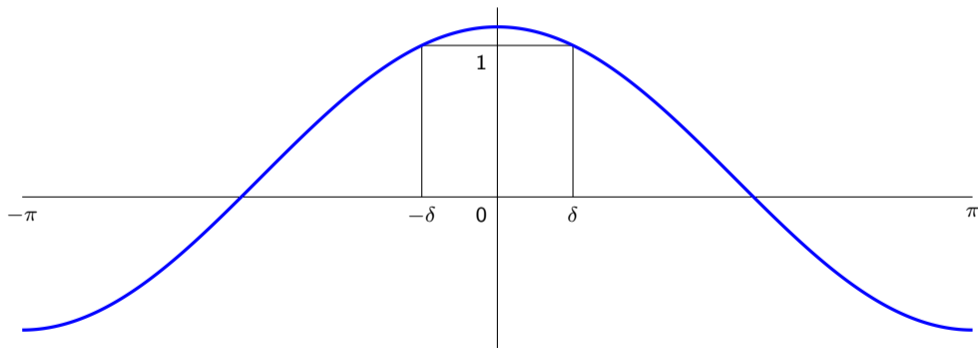
$$g(x) := 1 + \cos(x) - \cos(\delta).$$

De manera equivalente,

$$g(x) = 1 - \cos(\delta) + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Demostración, continuación

$$g(x) := 1 + \cos(x) - \cos(\delta).$$



Notamos que $g(x) \geq 1$ para cada x en A y $|g(x)| < 1$ para cada x en $[-\pi, \pi] \setminus A$.

Demostración, continuación

- $g(x) \geq 1$ para cada x en A ,
- $|g(x)| < 1$ para cada x en $[-\pi, \pi] \setminus A$.

Consideremos la siguiente sucesión de funciones:

$$h_n(x) := (g(x))^n.$$

Demostración, continuación

- $g(x) \geq 1$ para cada x en A ,
- $|g(x)| < 1$ para cada x en $[-\pi, \pi] \setminus A$.

Consideremos la siguiente sucesión de funciones:

$$h_n(x) := (g(x))^n.$$

Notamos que $h_n(x) \geq 1$ para cada x en A . Por eso

$$\int_A f(x)h_n(x) dx \geq \int_A \frac{1}{2} \cdot 1 dx = \delta > 0.$$

Demostración, continuación

- $g(x) \geq 1$ para cada x en A ,
- $|g(x)| < 1$ para cada x en $[-\pi, \pi] \setminus A$.

Consideremos la siguiente sucesión de funciones:

$$h_n(x) := (g(x))^n.$$

Notamos que $h_n(x) \geq 1$ para cada x en A . Por eso

$$\int_A f(x)h_n(x) dx \geq \int_A \frac{1}{2} \cdot 1 dx = \delta > 0.$$

Por otro lado, $h_n(x) \rightarrow 0$ para cada x en $[-\pi, \pi] \setminus A$.

Demostración, continuación

De la forma que tiene g se sigue que h_n es un polinomio trigonométrico, es decir, una combinación lineal de funciones básicas de Fourier:

$$h_n(x) = (g(x))^n = \left(1 - \cos(\delta) + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n = \sum_{j=-n}^n \lambda_{n,j} e^{jix}.$$

Como $\hat{f}_k = 0$ para cada k en \mathbb{Z} , concluimos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) h_n(x) dx = 2\pi \sum_{j=-n}^n \lambda_{n,j} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{jix} dx = 2\pi \sum_{j=-n}^n \lambda_{n,j} \hat{f}_{-j} = 0.$$

Demostración, final

Por otro lado,

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \setminus A \quad |f(x)h_n(x)| \leq |f(x)|,$$

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \setminus A \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x)h_n(x) = 0.$$

Como $|f|$ es integrable, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-\pi, \pi] \setminus A} f(x)h_n(x) \, dx = 0.$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f(x)h_n(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-\pi, \pi]} f(x)h_n(x) \, dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-\pi, \pi] \setminus A} f(x)h_n(x) \, dx = 0,$$

lo cual contradice al hecho que $f(x)h_n(x) \geq 1/2$ para cada x en A .

Valor en 0 de la función real continua con coeficientes de Fourier nulos

Lema

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $\hat{f}_k = 0$ para cada k en \mathbb{Z} . Entonces, $f(0) = 0$.

Demostración

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $f(0) \neq 0$.

Demostración

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $f(0) \neq 0$.

Consideremos la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) := \frac{1}{f(0)} f(x).$$

Entonces $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y para cada k en \mathbb{Z} tenemos que

$$\hat{g}_k = \frac{1}{f(0)} \hat{f}_k = 0.$$

Demostración

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $f(0) \neq 0$.

Consideremos la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) := \frac{1}{f(0)} f(x).$$

Entonces $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y para cada k en \mathbb{Z} tenemos que

$$\hat{g}_k = \frac{1}{f(0)} \hat{f}_k = 0.$$

Por el lema anterior, $g(0) \neq 1$. Contradicción.

Caso de funciones continuas con valores reales

Lema

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $\hat{f}_k = 0$ para cada k en \mathbb{Z} . Entonces, $f = 0$.

Demostración

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Consideramos $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) := f(x + x_0).$$

Entonces, $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y para cada k en \mathbb{Z} ,

$$\hat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + x_0) e^{-kix} dx = \frac{e^{kix_0}}{2\pi} \int_{x_0}^{2\pi+x_0} f(t) e^{-kit} dt = e^{kix_0} \hat{f}_k = 0.$$

Por el lema anterior, $g(0) = 0$. Luego $f(x_0) = 0$.

Caso de funciones continuas con valores complejos

Lema

Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f}_k = 0$ para cada k en \mathbb{Z} . Entonces, $f = 0$.

Demostración

Sean

$$u := \operatorname{Re} of, \quad v := \operatorname{Im} of.$$

Demostración

Sean

$$u := \operatorname{Re} \circ f, \quad v := \operatorname{Im} \circ f.$$

Sabemos cómo expresar los coeficientes de Fourier de u y v en términos de los coeficientes de Fourier de f :

$$\hat{u}_k$$

Demostración

Sean

$$u := \operatorname{Re} of, \quad v := \operatorname{Im} of.$$

Sabemos cómo expresar los coeficientes de Fourier de u y v en términos de los coeficientes de Fourier de f :

$$\hat{u}_k =$$

Demostración

Sean

$$u := \operatorname{Re} \circ f, \quad v := \operatorname{Im} \circ f.$$

Sabemos cómo expresar los coeficientes de Fourier de u y v en términos de los coeficientes de Fourier de f :

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2} \left(\hat{f}_k + \overline{\hat{f}_{-k}} \right),$$

Demostración

Sean

$$u := \operatorname{Re} \circ f, \quad v := \operatorname{Im} \circ f.$$

Sabemos cómo expresar los coeficientes de Fourier de u y v en términos de los coeficientes de Fourier de f :

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2} \left(\hat{f}_k + \overline{\hat{f}_{-k}} \right),$$

Demostración

Sean

$$u := \operatorname{Re} \circ f, \quad v := \operatorname{Im} \circ f.$$

Sabemos cómo expresar los coeficientes de Fourier de u y v en términos de los coeficientes de Fourier de f :

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2} \left(\hat{f}_k + \overline{\hat{f}_{-k}} \right), \quad \hat{v}_k$$

Demostración

Sean

$$u := \operatorname{Re} \circ f, \quad v := \operatorname{Im} \circ f.$$

Sabemos cómo expresar los coeficientes de Fourier de u y v en términos de los coeficientes de Fourier de f :

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2} \left(\hat{f}_k + \overline{\hat{f}_{-k}} \right), \quad \hat{v}_k =$$

Demostración

Sean

$$u := \operatorname{Re} \circ f, \quad v := \operatorname{Im} \circ f.$$

Sabemos cómo expresar los coeficientes de Fourier de u y v en términos de los coeficientes de Fourier de f :

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2} \left(\hat{f}_k + \overline{\hat{f}_{-k}} \right), \quad \hat{v}_k = \frac{1}{2i} \left(\hat{f}_k - \overline{\hat{f}_{-k}} \right).$$

Demostración

Sean

$$u := \operatorname{Re} \circ f, \quad v := \operatorname{Im} \circ f.$$

Sabemos cómo expresar los coeficientes de Fourier de u y v en términos de los coeficientes de Fourier de f :

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2} \left(\hat{f}_k + \overline{\hat{f}_{-k}} \right), \quad \hat{v}_k = \frac{1}{2i} \left(\hat{f}_k - \overline{\hat{f}_{-k}} \right).$$

Por el lema anterior, concluimos que $u = v = 0$.

Demostración

Sean

$$u := \operatorname{Re} \circ f, \quad v := \operatorname{Im} \circ f.$$

Sabemos cómo expresar los coeficientes de Fourier de u y v en términos de los coeficientes de Fourier de f :

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2} \left(\hat{f}_k + \overline{\hat{f}_{-k}} \right), \quad \hat{v}_k = \frac{1}{2i} \left(\hat{f}_k - \overline{\hat{f}_{-k}} \right).$$

Por el lema anterior, concluimos que $u = v = 0$.

Luego $f = 0$.

Los coeficientes de Fourier de una función constante

Ejercicio.

Los coeficientes de Fourier de una función constante

Ejercicio.

Sea $c \in \mathbb{C}$.

Los coeficientes de Fourier de una función constante

Ejercicio.

Sea $c \in \mathbb{C}$.

Definimos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(x) := c \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Los coeficientes de Fourier de una función constante

Ejercicio.

Sea $c \in \mathbb{C}$.

Definimos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(x) := c \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Muestre que para cada k en \mathbb{Z} ,

$$\hat{f}_k = \begin{cases} c, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0; \end{cases} \quad \text{esto es,} \quad \hat{f}_k = c \delta_{k,0}.$$

Propiedad inyectiva de los coeficientes de Fourier

Teorema

Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f}_k = 0$ para cada k en \mathbb{Z} . Entonces, $f \stackrel{\mu\text{-c.t.p.}}{=} 0$.

Demostración: definimos F

Definimos $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$F(x) := \int_{-\pi}^x f(t) dt.$$

Demostración: definimos F

Definimos $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$F(x) := \int_{-\pi}^x f(t) dt.$$

Luego F es absolutamente continua en cada intervalo acotado.

Demostración: definimos F

Definimos $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$F(x) := \int_{-\pi}^x f(t) dt.$$

Luego F es absolutamente continua en cada intervalo acotado.

En particular, F es continua.

Demostración: mostramos que F es 2π -periódica

La condición $\hat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) - F(-\pi)$$

Demostración: mostramos que F es 2π -periódica

La condición $\hat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) - F(-\pi) =$$

Demostración: mostramos que F es 2π -periódica

La condición $\hat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) - F(-\pi) = F(\pi)$$

Demostración: mostramos que F es 2π -periódica

La condición $\hat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) - F(-\pi) = F(\pi) =$$

Demostración: mostramos que F es 2π -periódica

La condición $\hat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) - F(-\pi) = F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\mu$$

Demostración: mostramos que F es 2π -periódica

La condición $\hat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) - F(-\pi) = F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\mu =$$

Demostración: mostramos que F es 2π -periódica

La condición $\hat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) - F(-\pi) = F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\mu = 2\pi \hat{f}_0$$

Demostración: mostramos que F es 2π -periódica

La condición $\hat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) - F(-\pi) = F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\mu = 2\pi \hat{f}_0 =$$

Demostración: mostramos que F es 2π -periódica

La condición $\hat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) - F(-\pi) = F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\mu = 2\pi \hat{f}_0 = 0.$$

Demostración: mostramos que F es 2π -periódica

La condición $\widehat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) - F(-\pi) = F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\mu = 2\pi \widehat{f}_0 = 0.$$

Para cada a en \mathbb{R} ,

$$F(a + 2\pi) - F(a)$$

Demostración: mostramos que F es 2π -periódica

La condición $\widehat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) - F(-\pi) = F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\mu = 2\pi \widehat{f}_0 = 0.$$

Para cada a en \mathbb{R} ,

$$F(a + 2\pi) - F(a) =$$

Demostración: mostramos que F es 2π -periódica

La condición $\widehat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) - F(-\pi) = F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\mu = 2\pi \widehat{f}_0 = 0.$$

Para cada a en \mathbb{R} ,

$$F(a + 2\pi) - F(a) = \int_{-\pi}^{a+2\pi} f \, d\mu - \int_{-\pi}^a f \, d\mu$$

Demostración: mostramos que F es 2π -periódica

La condición $\widehat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) - F(-\pi) = F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\mu = 2\pi \widehat{f}_0 = 0.$$

Para cada a en \mathbb{R} ,

$$F(a + 2\pi) - F(a) = \int_{-\pi}^{a+2\pi} f \, d\mu - \int_{-\pi}^a f \, d\mu =$$

Demostración: mostramos que F es 2π -periódica

La condición $\hat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) - F(-\pi) = F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\mu = 2\pi \hat{f}_0 = 0.$$

Para cada a en \mathbb{R} ,

$$F(a + 2\pi) - F(a) = \int_{-\pi}^{a+2\pi} f \, d\mu - \int_{-\pi}^a f \, d\mu = \int_a^{a+2\pi} f \, d\mu$$

Demostración: mostramos que F es 2π -periódica

La condición $\widehat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) - F(-\pi) = F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\mu = 2\pi \widehat{f}_0 = 0.$$

Para cada a en \mathbb{R} ,

$$F(a + 2\pi) - F(a) = \int_{-\pi}^{a+2\pi} f \, d\mu - \int_{-\pi}^a f \, d\mu = \int_a^{a+2\pi} f \, d\mu =$$

Demostración: mostramos que F es 2π -periódica

La condición $\widehat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) - F(-\pi) = F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\mu = 2\pi \widehat{f}_0 = 0.$$

Para cada a en \mathbb{R} ,

$$F(a + 2\pi) - F(a) = \int_{-\pi}^{a+2\pi} f \, d\mu - \int_{-\pi}^a f \, d\mu = \int_a^{a+2\pi} f \, d\mu = \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\mu$$

Demostración: mostramos que F es 2π -periódica

La condición $\widehat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) - F(-\pi) = F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\mu = 2\pi \widehat{f}_0 = 0.$$

Para cada a en \mathbb{R} ,

$$F(a + 2\pi) - F(a) = \int_{-\pi}^{a+2\pi} f \, d\mu - \int_{-\pi}^a f \, d\mu = \int_a^{a+2\pi} f \, d\mu = \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\mu =$$

Demostración: mostramos que F es 2π -periódica

La condición $\widehat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) - F(-\pi) = F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\mu = 2\pi \widehat{f}_0 = 0.$$

Para cada a en \mathbb{R} ,

$$F(a + 2\pi) - F(a) = \int_{-\pi}^{a+2\pi} f \, d\mu - \int_{-\pi}^a f \, d\mu = \int_a^{a+2\pi} f \, d\mu = \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\mu = 0.$$

Demostración: mostramos que F es 2π -periódica

La condición $\widehat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) - F(-\pi) = F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\mu = 2\pi \widehat{f}_0 = 0.$$

Para cada a en \mathbb{R} ,

$$F(a + 2\pi) - F(a) = \int_{-\pi}^{a+2\pi} f \, d\mu - \int_{-\pi}^a f \, d\mu = \int_a^{a+2\pi} f \, d\mu = \int_{-\pi}^{\pi} f \, d\mu = 0.$$

Concluimos que $F \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

Demostración: calculamos los coeficientes de Fourier de F

Notamos que la función $(x, t) \mapsto e^{-ikx} f(t)$ es Lebesgue-integrable en $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| e^{-ikx} f(t) \right| dt dx = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt = 4\pi^2 \mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}(f) < +\infty.$$

Demostración: calculamos los coeficientes de Fourier de F

Notamos que la función $(x, t) \mapsto e^{-ikx} f(t)$ es Lebesgue-integrable en $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{-ikx} f(t)| dt dx = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt = 4\pi^2 \mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}(f) < +\infty.$$

Por lo tanto, podemos aplicar el teorema de Fubini a la siguiente integral iterada:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-ikx} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} \left(\int_{-\pi}^x f(t) dt \right) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\int_t^{\pi} e^{-ikx} dx \right) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{e^{-ik\pi} - e^{-ikt}}{-ik} dt = -\frac{2\pi(-1)^k}{ik} \hat{f}_0 + \frac{2\pi}{ik} \hat{f}_k = 0. \end{aligned}$$

Demostración, final

Concluimos que $\hat{F}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Pongamos

$$G := F - \hat{F}_0.$$

Demostración, final

Concluimos que $\hat{F}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Pongamos

$$G := F - \hat{F}_0.$$

Entonces, $G \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $\hat{G}_k = \hat{F}_k$ para cada k en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Además, $\hat{G}_0 = 0$.

Demostración, final

Concluimos que $\hat{F}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Pongamos

$$G := F - \hat{F}_0.$$

Entonces, $G \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $\hat{G}_k = \hat{F}_k$ para cada k en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Además, $\hat{G}_0 = 0$.

Aplicando el resultado del inciso anterior a la función G , concluimos que G es la constante cero.

Demostración, final

Concluimos que $\hat{F}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Pongamos

$$G := F - \hat{F}_0.$$

Entonces, $G \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $\hat{G}_k = \hat{F}_k$ para cada k en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Además, $\hat{G}_0 = 0$.

Aplicando el resultado del inciso anterior a la función G , concluimos que G es la constante cero.

Luego F es una constante.

Demostración, final

Concluimos que $\hat{F}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Pongamos

$$G := F - \hat{F}_0.$$

Entonces, $G \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $\hat{G}_k = \hat{F}_k$ para cada k en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Además, $\hat{G}_0 = 0$.

Aplicando el resultado del inciso anterior a la función G , concluimos que G es la constante cero.

Luego F es una constante.

Por otro lado, $f(x) = F'(x)$ para casi todo x , así que $f = 0$ casi en todas partes.