Propiedad inyectiva de los coeficientes de Fourier

Objetivos. Demostrar que la correspondencia entre funciones 2π-periódicas integrables y sus coeficientes de Fourier es inyectiva.

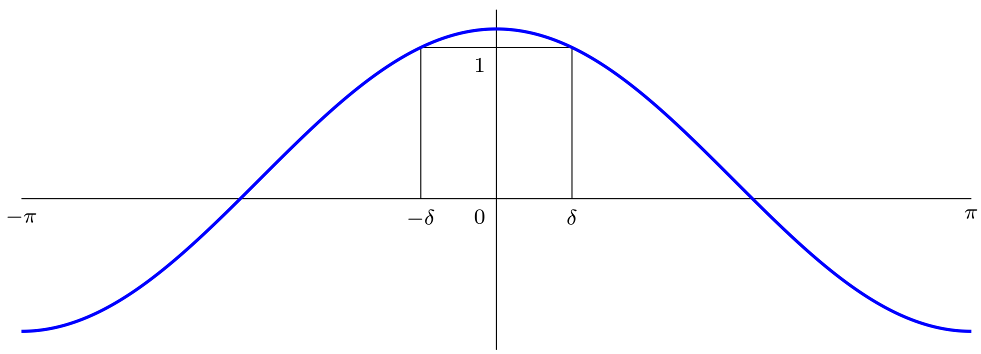
Denotamos por μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Vamos a empezar con un caso particular y poco a poco generalizarlo.

Lema 1. *Sea $f \in C_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, tal que $\widehat{f}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z}$. Entonces $f(0) \neq 1$.*

Demostración. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $f(0) = 1$. Como f es continua, existe $\delta \in (0, \pi)$ tal que $f(x) \geq 1/2$ en $A = [-\delta, \delta]$. Sea

$$g(x) = 1 + \cos(x) - \cos(\delta) = 1 - \cos(\delta) + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}}{2}.$$

El siguiente dibujo muestra la gráfica de g.



Luego pongamos

$$g_n(x) \coloneqq (g(x))^n.$$

Entonces $g_n(x) \geq 1$ para cada x en A y $g_n(x) \to 0$ para cada x en $[-\pi, \pi] \setminus A$. De la forma que tiene g se sigue que g_n se puede escribir como una combinación lineal de las funciones básicas de Fourier:

$$g_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} \lambda_j \, \mathrm{e}^{j\,\mathrm{i}\,x}.$$

Como $\widehat{f}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z}$, concluimos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g_n(x)\, \mathrm{d}x = 2\pi \sum_{j=-n}^{n} \lambda_k \widehat{f}_{-j} = 0.$$

Por otro lado, en el conjunto $[-\pi, \pi] \setminus A$ los productos $|f g_n|$ se pueden acotar por la función integrable $|f|$, y por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-\pi,\pi]\setminus A} f(x) g_n(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f(x) g_n(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

lo cual contradice al hecho que $f(x)g_n(x) \geq 1/2$ para cada x en I. $\square$

Lema 2. *Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z}$. Entonces $f(0) = 0$.*

Demostración. Razonando por reducción al absurdo supongamos que $f(0) \neq 0$. Consideremos la función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) \coloneqq \frac{1}{f(0)}\, f(x).$$

Entonces $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y para cada k en $\mathbb{Z}$ tenemos

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}_k = 0.$$

Por el lema anterior, $g(0) \neq 1$. Contradicción. $\square$

Lema 3. *Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, tal que $\widehat{f}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z}$. Entonces $f = 0$.*

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Pongamos $g(x) \coloneqq f(x + x_0)$. Entonces $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y para cada k en $\mathbb{Z}$,

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + x_0)\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x_0}}{2\pi} \int_{x_0}^{2\pi + x_0} f(t)\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,t}\, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x_0}\, \widehat{f}_k = 0.$$

Por el lema anterior, $g = 0$. Luego $f = 0$. $\square$

Lema 4. *Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z}$. Entonces $f = 0$ μ-c.t.p.*

Demostración. Pongamos

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La condición $\widehat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d} = 2\pi\, \widehat{f}_0 = 0 = F(-\pi).$$

Usando esta igualdad es fácil demostrar que $F \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Notamos que la funcion $(x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,f(t)$ es Lebesgue-integrable en $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,f(t)\right|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,\mathrm{d}t = 4\pi^2\mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}(f) < +\infty.$$

Podemos aplicar el teorema de Fubini a la siguiente integral iterada:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\left(\int_{-\pi}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\int_{t}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\pi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kt}}{-\mathrm{i}\,k}\,\mathrm{d}t = -\frac{2\pi(-1)^k}{\mathrm{i}\,k}\widehat{f}_0 + \frac{2\pi}{\mathrm{i}\,k}\widehat{f}_k = 0.\end{aligned}$$

Entonces $\widehat{F}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Pongamos

$$G \coloneqq F - \widehat{F}_0.$$

Entonces $G \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $\widehat{G}_k = \widehat{F}_k$ para cada k en $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Además, $\widehat{G}_0 = 0$.

Aplicando el resultado del inciso anterior a la función G concluimos que G es la constante cero, luego F es una constante. Por otro lado, $f(x) = F'(x)$ para casi todo x, así que $f = 0$ casi en todas partes. □

Teorema 5. *Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z}$. Entonces f es nula μ-c.t.p.*

Demostración. Por la definición de los coeficientes de Fourier,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x = \widehat{f}_k, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x = \widehat{f}_{-k}.$$

De estas igualdades (sumando, restando y multiplicando por factores apropiados) obtenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \pi(\widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k}), \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\operatorname{sen}(kx)\,\mathrm{d}x = \pi\,\mathrm{i}(\widehat{f}_k - \widehat{f}_{-k}).$$

De la suposición se sigue que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos(kx)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\operatorname{sen}(kx)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (k\in\mathbb{N}_0). \tag{1}$$

Sacamos la parte real e imaginaria de estas igualdades:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}(f)(x)\,\cos(kx)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Im}(f)(x)\,\cos(kx)\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{sen}(kx)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{sen}(kx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ahora multiplicamos las igualdades con sen por $-\mathrm{i}$ y sumamos con otras:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2}$$

Hemos demostrado que los coeficientes de Fourier de $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ son cero. Por el lema anterior, estas funciones son nulas μ-c.t.p., luego f también es cero μ-c.t.p. □