

# Estructura de sucesiones crecientes de conjuntos

**Objetivos.** Estudiar la estructura de las sucesiones crecientes de conjuntos. Explicar cómo pasar a sucesiones disjuntas.

**Requisitos.** Familias monótonas de conjuntos, propiedades de operaciones con conjuntos, le principio de inducción y el principio del buen orden.

**1 Observación** (el conjunto de los números naturales es bien ordenado, repaso). Se sabe que cualquier subconjunto no vacío de  $\mathbb{N}$  tiene un elemento mínimo. Es una de las formas del principio de inducción. Tarea adicional: usando solamente la inducción matemática demostrar que cualquier subconjunto no vacío de  $\mathbb{N}$  tiene un elemento mínimo.

[https://proofwiki.org/wiki/Equivalence\\_of\\_Well-Ordering\\_Principle\\_and\\_Induction](https://proofwiki.org/wiki/Equivalence_of_Well-Ordering_Principle_and_Induction)

**2 Lema** (sobre una sucesión creciente de conjuntos y los índices de pertenencia). Sean  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión creciente de conjuntos,  $k \in \{1, 2, \dots\}$  y  $x \in A_k$ . Denotemos por  $J$  al conjunto de los índices  $n$  tales que  $x \in A_n$ :

$$J := \{n \in \{1, 2, \dots\} : x \in A_n\}.$$

Entonces:

1.  $J \neq \emptyset$ .
2.  $J$  tiene un único elemento mínimo que denotemos por  $p$ .
3.  $p \leq k$ .
4.  $J = \mathbb{N}_p$ , donde  $\mathbb{N}_p := \{j \in \mathbb{Z} : j \geq p\} = \{p, p+1, p+2, \dots\}$ .

*Demostración.* 1. Por la hipótesis,  $k \in J$ .

2. Como el conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$  es bien ordenado y  $J$  es un subconjunto no vacío de  $\mathbb{N}$ , el conjunto  $J$  tiene un único elemento mínimo. Lo denotemos por  $p$ .

3. Como  $k \in J$  y  $p$  es el elemento mínimo de  $J$ , tenemos que  $p \leq k$ .

4. Si  $n \in \mathbb{N}$  y  $n \leq p$ , entonces de la construcción de  $p$  sigue que  $n \notin J$ . Si  $n \in \mathbb{N}$  y  $n \geq p$ , entonces  $x \in A_p \subset A_n$ , así que  $n \in J$ .  $\square$

El siguiente resultado nos permite pasar de una sucesión creciente de conjuntos a una sucesión disjunta que tiene la misma unión. Este resultado se usa para mostrar varias propiedades de medidas, en particular, la *continuidad por abajo* y luego la *propiedad subaditiva*.

**3 Proposición** (sobre una sucesión creciente de conjuntos y la sucesión de sus diferencias sucesivas). Sea  $(A_n)_{n=0}^{\infty}$  una sucesión creciente de conjuntos que empieza con el conjunto vacío:

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$$

Denotamos por  $(D_n)_{n=1}^{\infty}$  la sucesión de sus diferencias sucesivas:

$$\forall n \in \{1, 2, \dots\} \quad D_n := A_n \setminus A_{n-1}.$$

Entonces:

1. Los conjuntos  $D_n$  son disjuntos a pares.

2. Para todo  $n \in \{1, 2, \dots\}$ ,  $A_n = \bigcup_{k=1}^n D_k$ .

3.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ .

*Demostración.* 1. Sean  $p, q \in \{1, 2, \dots\}$ ,  $p < q$ . Demostremos que  $D_p \cap D_q = \emptyset$ . Notemos que  $p \leq q-1$  y por lo tanto  $A_p \subset A_{q-1}$ . De la definición de  $D_p$  sigue que  $D_p \subset A_p \subset A_{q-1}$ , y de la definición de  $D_q$  sigue que  $D_q \cap A_{q-1} = \emptyset$ .

2. Para todo  $k \in \{1, \dots, n\}$  tenemos que

$$D_k \subset A_k \subset A_n.$$

Por lo tanto

$$\bigcup_{k=1}^n D_k \subset A_n.$$

Para demostrar la contención inversa, supongamos que  $x \in A_n$ . Tenemos que encontrar un índice  $p \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $x \in D_p$ . Definimos el conjunto de índices  $J$  como en el Lema:

$$J := \left\{ k \in \{1, 2, \dots\} : x \in A_k \right\}.$$

Denotemos por  $p$  al elemento mínimo de  $J$ :

$$p := \min(J).$$

Como ya vimos en la demostración del Lema,  $p$  existe y  $p \leq k$ . De la construcción de  $p$  sigue que  $x \in A_p$  y  $x \notin A_{p-1}$ , lo cual significa que  $x \in D_p$ .

3. Aplicamos el resultado del inciso 2 y propiedades de la unión. Por un lado, para todo  $n \in \{1, 2, \dots\}$  tenemos que

$$A_n \subset \bigcup_{j=1}^n D_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j,$$

así que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j.$$

Por otro lado, para todo  $j \in \{1, 2, \dots\}$  tenemos que

$$D_j \subset A_j \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

así que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \quad \square$$

*Otra demostración.* El inciso 2 del teorema anterior se puede demostrar de otra manera, por inducción matemática sobre  $n$ . Verifiquemos la base de inducción:

$$A_1 = A_1 \setminus \emptyset = A_1 \setminus A_0 = D_1.$$

Suponiendo que  $A_n = \bigcup_{k=1}^n D_k$  (hipótesis de inducción), demostremos que  $A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n+1} D_k$ :

$$A_{n+1} = A_n \cup (A_{n+1} \setminus A_n) = A_n \cup D_{n+1} \stackrel{\text{H.I.}}{=} \left( \bigcup_{k=1}^n D_k \right) \cup D_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n+1} D_k. \quad \square$$

**4 Proposición** (pasar de una sucesión arbitraria de conjuntos a una sucesión creciente y a una sucesión disjunta). *Sea  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de conjuntos. Para todo  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  pongamos*

$$B_k := \bigcup_{n=1}^k A_n,$$

*y para todo  $k \in \{1, 2, \dots\}$  pongamos*

$$D_k := B_k \setminus B_{k-1}.$$

*Entonces:*

1. *La sucesión  $(B_k)_{k=0}^{\infty}$  es creciente y  $B_0 = \emptyset$ .*
2. *La sucesión  $(D_k)_{k=1}^{\infty}$  es disjunta.*
3. *Para todo  $k \in \{1, 2, \dots\}$ ,*

$$D_k = A_k \setminus B_{k-1}.$$

4. 
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j.$$