Integrales impropias de Lebesgue de funciones positivas (un tema de análisis real)

Egor Maximenko,
con ayuda de Antonio Jimarez Escamilla y Abdiel Rolando Márquez Meza

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

2 de diciembre de 2021

Objetivos

- Considerar las integrales impropias de Lebesgue de funciones positivas.
- Demostrar que su convergencia es equivalente a la existencia de la integral de Lebesgue en el intervalo completo.
- Estudiar criterios para la convergencia de integrales impropias para funciones positivas.

Prerrequisitos

- La integral de Lebesgue y sus propiedades básicas.
- Los límites de una función creciente en los extremos de un intervalo.
- El límite de una función creciente en términos del límite de una sucesión
- El teorema de la convergencia monótona.

Tabla de contenido

El criterio de límite por sucesiones (criterio de Heine)

Teorema

Sean:

- $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos de Hausdorff,
- $f : X \to Y$ una función,
- $a \in X$, $b \in Y$.

Suponga además que existe una base local numerable de la topoogía τ_X en el punto a.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

(b) $\forall (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (X \setminus \{a\})^{\mathbb{N}} \qquad \lim\limits_{n \to \infty} t_n = a \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n \to +\infty} f(t_n) = b.$

Los límites de las funciones crecientes en los extremos de intervalos

Proposición

Sean

- $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$,
- $\varphi\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una función creciente,
- $V = \varphi[(a, b)]$.

Entonces

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in (a,b)}} \varphi(x) = \sup(V), \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} \varphi(x) = \inf(V).$$

El límite de una función creciente en términos del límite de una sucesión

Proposición

Sean

- $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$,
- $\varphi\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una función creciente,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en (a, b) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = b$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(u_n) = \lim_{t\to b^-} \varphi(t).$$

El límite de una función creciente en términos del límite de una sucesión

Proposición

Sean

- $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$,
- $\varphi\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una función creciente,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en (a, b) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = b$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(u_n) = \lim_{t\to b^-} \varphi(t).$$

Esta proposición se demuestra fácilmente usando la anterior.

El teorema de la convergencia monótona

Teorema

Sean

- $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida,
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ una sucesión creciente de funciones,
- $g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Entonces $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

El teorema de la convergencia dominada

Teorema

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$.

Supongamos que

i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función g,

ii) existe una función $h \in \mathcal{L}^1(X, \mu, [0, +\infty])$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x)| \leq h(x).$$

Entonces

- $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$ para cada n en $\mathbb{N}$, $\quad g \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$,
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - g| \, \mathrm{d}\mu = 0$ y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.

Tabla de contenido

Definición de la integral impropia, el caso del extremo derecho

En este tema suponemos que $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$.

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b), \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Supongamos que

$$\forall v \in (a,b) \qquad \int_{(a,v)} |f| < +\infty.$$

Entonces definimos

$$\boxed{\int_a^{\to b} f := \lim_{\substack{v \to b \\ v \in (a,b)}} \int_a^v f.}$$

Si este límite existe y es finito, entonces se dice que la integral impropia $\int_a^{\to b} f$ converge.

Definición de la integral impropia, el caso del extremo izquierdo

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b),\mathcal{F},\mathbb{C})$.

Supongamos que

$$\forall v \in (a,b) \qquad \int_{(v,b)} |f| < +\infty.$$

Entonces definimos

$$\boxed{\int_{\to a}^{b} f := \lim_{\substack{v \to a \\ v \in (a,b)}} \int_v^b f.}$$

Si este límite existe y es finito, entonces se dice que la integral impropia $\int_{\to a}^b f$ converge.

Definición de la integral impropia, el caso de ambos extremos

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b),\mathcal{F},\mathbb{C})$.

Supongamos que

$$\forall u,v \in (a,b) \quad \int_{(u,v)} |f| < +\infty,$$

y existe c en (a,b) tal que $\displaystyle\int_c^{\to b} f$ y $\displaystyle\int_{\to a}^{c} f$ convergen.

Entonces definimos

$$\boxed{\int_{\to a}^{\to b} f := \int_{\to a}^{c} f + \int_c^{\to b} f.}$$

Definición de la integral impropia, el caso de ambos extremos

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b),\mathcal{F},\mathbb{C})$.

Supongamos que

$$\forall u, v \in (a,b) \quad \int_{(u,v)} |f| < +\infty,$$

y existe c en (a,b) tal que $\displaystyle\int_c^{\to b} f$ y $\displaystyle\int_{\to a}^{c} f$ convergen.

Entonces definimos

$$\int_{\to a}^{\to b} f := \int_{\to a}^{c} f + \int_c^{\to b} f.$$

En las clases anteriores demostramos que la definición de $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f$ no depende de la elección del punto c en (a,b).

Tabla de contenido

Teorema

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b),\mathcal{F},[0,+\infty])$. Entonces

$$\int_{(a,b)} f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{u\to b^-} \int_{(a,u)} f \,\mathrm{d}\mu,$$

esto es,

$$\int_a^b f = \int_a^{\to b} f.$$

Teorema

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b), \mathcal{F}, [0,+\infty])$. Entonces

$$\int_{(a,b)} f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{u \to b^-} \int_{(a,u)} f \, \mathrm{d}\mu,$$

esto es,

$$\int_a^b f = \int_a^{\to b} f.$$

Corolario

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b), \mathcal{F}, [0,+\infty])$. Entonces

$$f \in \mathcal{L}^1((a,b), \mu, [0,+\infty]) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_a^{\to b} f \text{ converge.}$$

Demostración: construimos una sucesión creciente que tiende a b.

Vamos a construir alguna sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (a,b)^{\mathbb{N}}$ tal que $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow b$.

Demostración: construimos una sucesión creciente que tiende a b.

Vamos a construir alguna sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (a,b)^{\mathbb{N}}$ tal que $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow b$.

Si $b = +\infty$, pongamos

$$t_k :=$$

Demostración: construimos una sucesión creciente que tiende a b.

Vamos a construir alguna sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (a,b)^{\mathbb{N}}$ tal que $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow b$.

Si $b = +\infty$, pongamos

$$t_k := \max\{a+1, k\}.$$

Demostración: construimos una sucesión creciente que tiende a b.

Vamos a construir alguna sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (a,b)^{\mathbb{N}}$ tal que $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow b$.

Si $b = +\infty$, pongamos

$$t_k := \max\{a+1, k\}.$$

Si $b \in \mathbb{R}$, pongamos

$$t_k :=$$

Demostración: construimos una sucesión creciente que tiende a b.

Vamos a construir alguna sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (a,b)^{\mathbb{N}}$ tal que $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow b$.

Si $b = +\infty$, pongamos

$$t_k := \max\{a+1, k\}.$$

Si $b \in \mathbb{R}$, pongamos

$$t_k := \max\left\{\frac{a+b}{2},\ b - \frac{1}{k}\right\}.$$

Demostración: construimos una sucesión creciente que tiende a b.

Vamos a construir alguna sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (a,b)^{\mathbb{N}}$ tal que $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow b$.

Si $b = +\infty$, pongamos

$$t_k := \max\{a+1, k\}.$$

Si $b \in \mathbb{R}$, pongamos

$$t_k := \max\left\{\frac{a+b}{2},\ b - \frac{1}{k}\right\}.$$

Ejercicio: dar otras recetas para t_k.

Demostración: el límite de una función creciente se puede calcular como el límite de una sucesión

Definimos $J\colon (a, b] \to [0, +\infty]$,

$$J(u) := \int_{(a,u)} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración: el límite de una función creciente se puede calcular como el límite de una sucesión

Definimos $J\colon (a,b] \to [0,+\infty]$,

$$J(u) := \int_{(a,u)} f \,\mathrm{d}\mu.$$

La función J es creciente. Por lo tanto,

$$\lim_{u\to b^-} J(u) = \lim_{k\to\infty} J(t_k).$$

Demostración: el límite de una función creciente se puede calcular como el límite de una sucesión

Definimos $J\colon (a,b] \to [0,+\infty]$,

$$J(u) := \int_{(a,u)} f \,\mathrm{d}\mu.$$

La función J es creciente. Por lo tanto,

$$\lim_{u\to b^-} J(u) = \lim_{k\to\infty} J(t_k).$$

En otras palabras,

$$\int_a^{\to b} f = \lim_{k\to\infty} \int_{(a,u_k)} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración: aplicamos el teorema de la convergencia monótona

Para cada x en (a, b), como $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = b$, elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \geq m \qquad t_k > x.$$

Demostración: aplicamos el teorema de la convergencia monótona

Para cada x en (a,b), como $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = b$, elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \geq m \qquad t_k > x.$$

Para cada $k \geq m$ tendremos

$$f(x)\,1_{(a,t_k)}(x) =$$

Demostración: aplicamos el teorema de la convergencia monótona

Para cada x en (a, b), como $\lim_{k\to\infty} u_k = b$, elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \geq m \qquad t_k > x.$$

Para cada $k \geq m$ tendremos

$$f(x)\, 1_{(a,t_k)}(x) = f(x).$$

Demostración: aplicamos el teorema de la convergencia monótona

Para cada x en (a, b), como $\lim_{k\to\infty} u_k = b$, elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \geq m \qquad t_k > x.$$

Para cada $k \geq m$ tendremos

$$f(x)\, 1_{(a,t_k)}(x) = f(x).$$

Por lo tanto, cuando $k \to \infty$,

$$f(x)\, 1_{(a,t_k)}(x) \to$$

Demostración: aplicamos el teorema de la convergencia monótona

Para cada x en (a, b), como $\lim_{k\to\infty} u_k = b$, elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \geq m \qquad t_k > x.$$

Para cada $k \geq m$ tendremos

$$f(x)\, 1_{(a,t_k)}(x) = f(x).$$

Por lo tanto, cuando $k \to \infty$,

$$f(x)\, 1_{(a,t_k)}(x) \to f(x).$$

Demostración: aplicamos el teorema de la convergencia monótona

Para cada x en (a, b), como $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = b$, elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \geq m \qquad t_k > x.$$

Para cada $k \geq m$ tendremos

$$f(x)\, 1_{(a,t_k)}(x) = f(x).$$

Por lo tanto, cuando $k \to \infty$,

$$f(x)\, 1_{(a,t_k)}(x) \to f(x).$$

Aplicamos el TCM:

$$\int_a^{\to b} f =$$

Demostración: aplicamos el teorema de la convergencia monótona

Para cada x en (a, b), como $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = b$, elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \ge m \qquad t_k > x.$$

Para cada $k \ge m$ tendremos

$$f(x)\, 1_{(a,t_k)}(x) = f(x).$$

Por lo tanto, cuando $k \to \infty$,

$$f(x)\, 1_{(a,t_k)}(x) \to f(x).$$

Aplicamos el TCM:

$$\int_a^{\to b} f = \lim_{k\to\infty} \int_{(a,t_k)} f \,\mathrm{d}\mu =$$

Demostración: aplicamos el teorema de la convergencia monótona

Para cada x en (a, b), como $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = b$, elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \ge m \qquad t_k > x.$$

Para cada $k \ge m$ tendremos

$$f(x)\,1_{(a,t_k)}(x) = f(x).$$

Por lo tanto, cuando $k \to \infty$,

$$f(x)\,1_{(a,t_k)}(x) \to f(x).$$

Aplicamos el TCM:

$$\int_a^{\to b} f = \lim_{k\to\infty} \int_{(a,t_k)} f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{(a,b)} f\,1_{(a,t_k)}\,\mathrm{d}\mu \overset{\text{(TCM)}}{=\!=\!=}$$

Demostración: aplicamos el teorema de la convergencia monótona

Para cada x en (a, b), como $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = b$, elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \geq m \qquad t_k > x.$$

Para cada $k \geq m$ tendremos

$$f(x)\, 1_{(a,t_k)}(x) = f(x).$$

Por lo tanto, cuando $k \to \infty$,

$$f(x)\, 1_{(a,t_k)}(x) \to f(x).$$

Aplicamos el TCM:

$$\int_a^{\to b} f = \lim_{k\to\infty} \int_{(a,t_k)} f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{(a,b)} f\, 1_{(a,t_k)} \,\mathrm{d}\mu \xlongequal{\text{(TCM)}} \int_{(a,b)} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración: aplicamos el teorema de la convergencia monótona

Para cada x en (a, b), como $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = b$, elegimos m en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \ge m \qquad t_k > x.$$

Para cada $k \ge m$ tendremos

$$f(x)\, 1_{(a,t_k)}(x) = f(x).$$

Por lo tanto, cuando $k \to \infty$,

$$f(x)\, 1_{(a,t_k)}(x) \to f(x).$$

Aplicamos el TCM:

$$\int_a^{\to b} f = \lim_{k\to\infty} \int_{(a,t_k)} f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{(a,b)} f\, 1_{(a,t_k)} \,\mathrm{d}\mu \overset{\text{(TCM)}}{=\!=\!=} \int_{(a,b)} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Hemos demostrado el teorema.

Resultados similares para el extremo izquierdo y ambos extremos

Ejercicio. Enunciar y demostrar un teorema similar para

$$\int_{\to a}^{b} f.$$

Resultados similares para el extremo izquierdo y ambos extremos

Ejercicio. Enunciar y demostrar un teorema similar para

$$\int_{\to a}^{b} f.$$

Ejercicio. Enunciar y demostrar un teorema similar para

$$\int_{\to a}^{\to b} f.$$

Ejemplos: la función potencial en $(1, +\infty)$

Ejercicio. Sea $p \in (0, +\infty)$. Definimos $f\colon (1, +\infty) \to [0, +\infty)$,

$$f(x) := \frac{1}{x^p}.$$

- Demostrar que si $p > 1$, entonces $f \in \mathcal{L}^1$.
- Demostrar que si $0 < p \leq 1$, entonces $f \notin \mathcal{L}^1$.

Ejemplos: la función potencial en $(1, +\infty)$

Ejercicio. Sea $p \in (0, +\infty)$. Definimos $f\colon (1, +\infty) \to [0, +\infty)$,

$$f(x) := \frac{1}{x^p}.$$

- Demostrar que si $p > 1$, entonces $f \in \mathcal{L}^1$.
- Demostrar que si $0 < p \leq 1$, entonces $f \notin \mathcal{L}^1$.

Sugerencia: en cada uno de los casos calcular la integral impropia

$$\int_1^{\to +\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}.$$

Ejemplos: la función potencial en $(0, 1)$

Ejercicio. Sea $p \in (0, +\infty)$. Definimos $f\colon (0, 1) \to [0, +\infty)$,

$$f(x) := \frac{1}{x^p}.$$

- Demostrar que si $p \geq 1$, entonces $f \notin \mathcal{L}^1$.
- Demostrar que si $0 < p < 1$, entonces $f \in \mathcal{L}^1$.

Ejemplos: la función potencial en $(0,1)$

Ejercicio. Sea $p \in (0,+\infty)$. Definimos $f\colon (0,1) \to [0,+\infty)$,

$$f(x) := \frac{1}{x^p}.$$

- Demostrar que si $p \geq 1$, entonces $f \notin \mathcal{L}^1$.
- Demostrar que si $0 < p < 1$, entonces $f \in \mathcal{L}^1$.

Sugerencia: en cada uno de los casos calcular la integral impropia

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}.$$

Ejemplos: la función potencial en $(0, +\infty)$

Ejercicio. Sea $p \in (0, +\infty)$. Definimos $f\colon (0, +\infty) \to [0, +\infty)$,

$$f(x) := \frac{1}{x^p}.$$

Demostrar que $f \notin \mathcal{L}^1((0, +\infty), \mu, [0, +\infty))$.

Tabla de contenido

Teorema (comparación de integrales impropias con una desigualdad)

Sean $f, g \in \mathcal{M}((a,b), \mathcal{F}, [0,+\infty])$ y sea $C > 0$. Supongamos que

$$\forall x \in (a,b) \qquad f(x) \leq Cg(x).$$

Entonces, la convergencia de $\displaystyle\int_a^{\to b} g$ implica la convergencia de $\displaystyle\int_a^{\to b} f$.

En otras palabras, si $g \in \mathcal{L}^1((a,b))$, entonces $f \in \mathcal{L}^1((a,b))$.

Demostración.

$$\int_{(a,b)} f \, \mathrm{d}\mu \leq C \int_{(a,b)} f \, \mathrm{d}\mu, \qquad \text{esto es,} \qquad \int_a^{\to b} f \leq C \int_a^{\to b} g.$$

Teorema (comparación de integrales impropias con una equivalencia)

Sean $f, g \in \mathcal{M}((a,b), \mathcal{F}, (0,+\infty))$. Supongamos que

$$\forall u \in (a,b) \qquad \int_a^u f < +\infty \qquad \wedge \qquad \int_a^u g < +\infty$$

y $f(x) \sim g(x)$ cuando $x \to b^-$, esto es,

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Entonces

$$\int_a^{\to b} f \text{ converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_a^{\to b} g \text{ converge.}$$

Demostración, inicio

Supongamos que $\int_a^b g < +\infty$. Queremos demostrar que $\int_a^b f < +\infty$.

Demostración, inicio

Supongamos que $\int_a^b g < +\infty$. Queremos demostrar que $\int_a^b f < +\infty$.

(La otra implicación se demuestra de manera similar.)

Demostración, inicio

Supongamos que $\int_a^b g < +\infty$. Queremos demostrar que $\int_a^b f < +\infty$.

(La otra implicación se demuestra de manera similar.)

Usamos la suposición

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

y aplicamos la definición del límite con $\varepsilon = 1$.

Demostración, inicio

Supongamos que $\int_a^b g < +\infty$. Queremos demostrar que $\int_a^b f < +\infty$.

(La otra implicación se demuestra de manera similar.)

Usamos la suposición

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

y aplicamos la definición del límite con $\varepsilon = 1$.

Obtenemos u en (a, b) tal que

Demostración, inicio

Supongamos que $\int_a^b g < +\infty$. Queremos demostrar que $\int_a^b f < +\infty$.

(La otra implicación se demuestra de manera similar.)

Usamos la suposición

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

y aplicamos la definición del límite con $\varepsilon = 1$.

Obtenemos u en (a, b) tal que

$$\forall x \in (u, b) \qquad \frac{f(x)}{g(x)} <$$

Demostración, inicio

Supongamos que $\int_a^b g < +\infty$. Queremos demostrar que $\int_a^b f < +\infty$.

(La otra implicación se demuestra de manera similar.)

Usamos la suposición

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

y aplicamos la definición del límite con $\varepsilon = 1$.

Obtenemos u en (a, b) tal que

$$\forall x \in (u, b) \qquad \frac{f(x)}{g(x)} < 2.$$

Demostración, inicio

Supongamos que $\int_a^b g < +\infty$. Queremos demostrar que $\int_a^b f < +\infty$.

(La otra implicación se demuestra de manera similar.)

Usamos la suposición

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

y aplicamos la definición del límite con $\varepsilon = 1$.

Obtenemos u en (a, b) tal que

$$\forall x \in (u, b) \qquad \frac{f(x)}{g(x)} < 2.$$

En otras palabras, $f < 2g$ en (u, b).

Demostración, final

Hemos mostrado que $f < 2g$ en (u, b).

Demostración, final

Hemos mostrado que $f < 2g$ en (u, b).

Además, por una de las suposiciones del teorema, f es integrable en (a, u).

Demostración, final

Hemos mostrado que $f < 2g$ en (u, b).

Además, por una de las suposiciones del teorema, f es integrable en (a, u).

Luego

$$\int_a^b f =$$

Demostración, final

Hemos mostrado que $f < 2g$ en (u, b).

Además, por una de las suposiciones del teorema, f es integrable en (a, u).

Luego

$$\int_a^b f = \int_a^u f + \int_u^b f \leq$$

Demostración, final

Hemos mostrado que $f < 2g$ en (u, b).

Además, por una de las suposiciones del teorema, f es integrable en (a, u).

Luego

$$\int_a^b f = \int_a^u f + \int_u^b f \leq \int_a^u f + 2\int_u^b g$$

Demostración, final

Hemos mostrado que $f < 2g$ en (u, b).

Además, por una de las suposiciones del teorema, f es integrable en (a, u).

Luego

$$\int_a^b f = \int_a^u f + \int_u^b f \leq \int_a^u f + 2\int_u^b g < +\infty.$$

Ejercicio. Demostrar resultados similares para $\int_{\to a}^{b}$, $\int_{\to a}^{\to b}$.

Ejemplo

Determinemos si converge la integral

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\operatorname{sen}(x)}{4x^2 + 5x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Ejemplo

Determinemos si converge la integral

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\operatorname{sen}(x)}{4x^2 + 5x^3}\,\mathrm{d}x.$$

$$f(x) := \frac{\operatorname{sen}(x)}{4x^2 + 5x^3} =$$

Ejemplo

Determinemos si converge la integral

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\operatorname{sen}(x)}{4x^2 + 5x^3} \, \mathrm{d}x.$$

$$f(x) := \frac{\operatorname{sen}(x)}{4x^2 + 5x^3} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \frac{1}{1 + 5x} \cdot \frac{1}{4x}$$

Ejemplo

Determinemos si converge la integral

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\mathrm{sen}(x)}{4x^2 + 5x^3}\, \mathrm{d}x.$$

$$f(x) := \frac{\mathrm{sen}(x)}{4x^2 + 5x^3} = \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} \cdot \frac{1}{1+5x} \cdot \frac{1}{4x} \overset{x \to 0^+}{\sim}$$

Ejemplo

Determinemos si converge la integral

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\mathrm{sen}(x)}{4x^2 + 5x^3}\,\mathrm{d}x.$$

$$f(x) := \frac{\mathrm{sen}(x)}{4x^2 + 5x^3} = \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} \cdot \frac{1}{1+5x} \cdot \frac{1}{4x} \overset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{4x}.$$

Ejemplo

Determinemos si converge la integral

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\mathsf{sen}(x)}{4x^2 + 5x^3}\,\mathrm{d}x.$$

$$f(x) := \frac{\mathsf{sen}(x)}{4x^2 + 5x^3} = \frac{\mathsf{sen}(x)}{x} \cdot \frac{1}{1+5x} \cdot \frac{1}{4x} \overset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{4x}.$$

En otras palabras, con $g(x) := \frac{1}{4x}$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} =$$

Ejemplo

Determinemos si converge la integral

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\mathsf{sen}(x)}{4x^2 + 5x^3}\,\mathrm{d}x.$$

$$f(x) := \frac{\mathsf{sen}(x)}{4x^2 + 5x^3} = \frac{\mathsf{sen}(x)}{x} \cdot \frac{1}{1+5x} \cdot \frac{1}{4x} \overset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{4x}.$$

En otras palabras, con $g(x) := \frac{1}{4x}$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\mathsf{sen}(x)}{4x^2 + 5x^3} \cdot \frac{4x}{1} =$$

Ejemplo

Determinemos si converge la integral

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\mathrm{sen}(x)}{4x^2 + 5x^3}\,\mathrm{d}x.$$

$$f(x) := \frac{\mathrm{sen}(x)}{4x^2 + 5x^3} = \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} \cdot \frac{1}{1+5x} \cdot \frac{1}{4x} \overset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{4x}.$$

En otras palabras, con $g(x) := \frac{1}{4x}$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\mathrm{sen}(x)}{4x^2 + 5x^3} \cdot \frac{4x}{1} = \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{5}{4}x} \to 1.$$

Como $\int_{\to 0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{4x} = +\infty$, concluimos que la integral original diverge.

Tabla de contenido

Teorema (sobre las integrales impropias de las funciones Lebesgue integrables)

Sea $f \in \mathcal{L}^1((a, b), \mu, \mathbb{C})$. Entonces

$$\int_a^{\to b} f \text{ converge}$$

y

$$\int_a^{\to b} f = \int_{(a,b)} f.$$

Demostración, inicio

Ya sabemos que

$$\lim_{u \to b^-} \int_{(a,u)} |f| =$$

Demostración, inicio

Ya sabemos que

$$\lim_{u \to b^-} \int_{(a,u)} |f| = \int_{(a,b)} |f|.$$

Demostración, inicio

Ya sabemos que

$$\lim_{u \to b^-} \int_{(a,u)} |f| = \int_{(a,b)} |f|.$$

Esto implica que

$$\lim_{u \to b^-} \int_{(u,b)} |f| =$$

Demostración, inicio

Ya sabemos que

$$\lim_{u \to b^-} \int_{(a,u)} |f| = \int_{(a,b)} |f|.$$

Esto implica que

$$\lim_{u \to b^-} \int_{(u,b)} |f| = \lim_{u \to b^-} \left(\int_{(a,b)} |f| - \int_{(a,u)} |f| \right) =$$

Demostración, inicio

Ya sabemos que

$$\lim_{u \to b^-} \int_{(a,u)} |f| = \int_{(a,b)} |f|.$$

Esto implica que

$$\lim_{u \to b^-} \int_{(u,b)} |f| = \lim_{u \to b^-} \left(\int_{(a,b)} |f| - \int_{(a,u)} |f| \right) = \int_{(a,b)} |f| - \lim_{u \to b^-} \int_{(a,u)} |f| =$$

Demostración, inicio

Ya sabemos que

$$\lim_{u \to b^-} \int_{(a,u)} |f| = \int_{(a,b)} |f|.$$

Esto implica que

$$\lim_{u \to b^-} \int_{(u,b)} |f| = \lim_{u \to b^-} \left(\int_{(a,b)} |f| - \int_{(a,u)} |f| \right) = \int_{(a,b)} |f| - \lim_{u \to b^-} \int_{(a,u)} |f| = 0.$$

Demostración, inicio

Ya sabemos que

$$\lim_{u\to b^-} \int_{(a,u)} |f| = \int_{(a,b)} |f|.$$

Esto implica que

$$\lim_{u\to b^-} \int_{(u,b)} |f| = \lim_{u\to b^-} \left(\int_{(a,b)} |f| - \int_{(a,u)} |f| \right) = \int_{(a,b)} |f| - \lim_{u\to b^-} \int_{(a,u)} |f| = 0.$$

Para cada u en (a, b),

$$\left| \int_{(u,b)} f \right| \leq$$

Demostración, inicio

Ya sabemos que

$$\lim_{u \to b^-} \int_{(a,u)} |f| = \int_{(a,b)} |f|.$$

Esto implica que

$$\lim_{u \to b^-} \int_{(u,b)} |f| = \lim_{u \to b^-} \left(\int_{(a,b)} |f| - \int_{(a,u)} |f| \right) = \int_{(a,b)} |f| - \lim_{u \to b^-} \int_{(a,u)} |f| = 0.$$

Para cada u en (a, b),

$$\left| \int_{(u,b)} f \right| \leq \int_{(u,b)} |f|.$$

Demostración, inicio

Ya sabemos que

$$\lim_{u\to b^-} \int_{(a,u)} |f| = \int_{(a,b)} |f|.$$

Esto implica que

$$\lim_{u\to b^-} \int_{(u,b)} |f| = \lim_{u\to b^-} \left(\int_{(a,b)} |f| - \int_{(a,u)} |f| \right) = \int_{(a,b)} |f| - \lim_{u\to b^-} \int_{(a,u)} |f| = 0.$$

Para cada u en (a,b),

$$\left| \int_{(u,b)} f \right| \leq \int_{(u,b)} |f|.$$

Luego

$$\lim_{u\to b^-} \int_{(u,b)} f =$$

Demostración, inicio

Ya sabemos que

$$\lim_{u \to b^-} \int_{(a,u)} |f| = \int_{(a,b)} |f|.$$

Esto implica que

$$\lim_{u \to b^-} \int_{(u,b)} |f| = \lim_{u \to b^-} \left(\int_{(a,b)} |f| - \int_{(a,u)} |f| \right) = \int_{(a,b)} |f| - \lim_{u \to b^-} \int_{(a,u)} |f| = 0.$$

Para cada u en (a, b),

$$\left| \int_{(u,b)} f \right| \leq \int_{(u,b)} |f|.$$

Luego

$$\lim_{u \to b^-} \int_{(u,b)} f = 0.$$

Demostración, final

Hemos mostrado que

$$\lim_{u \to b^-} \int_{(u,b)} f = 0.$$

Demostración, final

Hemos mostrado que

$$\lim_{u \to b^-} \int_{(u,b)} f = 0.$$

Notamos que

$$\int_{(a,u)} f = \int_{(a,b)} f - \int_{(u,b)} f.$$

Demostración, final

Hemos mostrado que

$$\lim_{u \to b^-} \int_{(u,b)} f = 0.$$

Notamos que

$$\int_{(a,u)} f = \int_{(a,b)} f - \int_{(u,b)} f.$$

Pasamos al límite cuando $u \to b^-$:

$$\lim_{u \to b^-} \int_{(a,u)} f = \int_{(a,b)} f.$$

Idea de otra demostración

Definimos $J\colon (a,b] \to \mathbb{C}$,

$$J(u) := \int_{(a,u)} f.$$

Como la topología de $(a,b]$ tiene una base local numerable en el punto b,

Idea de otra demostración

Definimos $J\colon (a,b] \to \mathbb{C}$,

$$J(u) := \int_{(a,u)} f.$$

Como la topología de $(a,b]$ tiene una base local numerable en el punto b, por el criterio de Heine es suficiente demostrar que

Idea de otra demostración

Definimos $J\colon (a,b] \to \mathbb{C}$,

$$J(u) := \int_{(a,u)} f.$$

Como la topología de $(a,b]$ tiene una base local numerable en el punto b, por el criterio de Heine es suficiente demostrar que para cada sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con valores en (a,b),

$$\lim_{k\to\infty} t_k = b \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} J(t_k) = J(b).$$

Idea de otra demostración

Definimos $J\colon (a, b] \to \mathbb{C}$,

$$J(u) := \int_{(a,u)} f.$$

Como la topología de $(a, b]$ tiene una base local numerable en el punto b, por el criterio de Heine es suficiente demostrar que para cada sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con valores en (a, b),

$$\lim_{k\to\infty} t_k = b \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} J(t_k) = J(b).$$

Notamos que para cada x en (a, b),

$$\lim_{k\to\infty}\Big(f(x)1_{(a,t_k)}(x)\Big) =$$

Idea de otra demostración

Definimos $J\colon (a,b] \to \mathbb{C}$,

$$J(u) := \int_{(a,u)} f.$$

Como la topología de $(a,b]$ tiene una base local numerable en el punto b, por el criterio de Heine es suficiente demostrar que para cada sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con valores en (a,b),

$$\lim_{k\to\infty} t_k = b \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} J(t_k) = J(b).$$

Notamos que para cada x en (a,b),

$$\lim_{k\to\infty}\Big(f(x)1_{(a,t_k)}(x)\Big) = f(x).$$

Idea de otra demostración

Definimos $J\colon (a,b] \to \mathbb{C}$,

$$J(u) := \int_{(a,u)} f.$$

Como la topología de $(a,b]$ tiene una base local numerable en el punto b, por el criterio de Heine es suficiente demostrar que para cada sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con valores en (a,b),

$$\lim_{k\to\infty} t_k = b \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} J(t_k) = J(b).$$

Notamos que para cada x en (a,b),

$$\lim_{k\to\infty} \Big(f(x) 1_{(a,t_k)}(x) \Big) = f(x).$$

Luego aplicamos el teorema de la convergencia dominada.

Ejercicio. Demostrar resultados similares para $\int_{\to a}$, $\int_{\to a}^{\to b}$.

Ejercicio. Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mu, \mathbb{C})$. Demostrar que

$$\lim_{u \to +\infty} \int_{(-\infty,u)\cup(u,+\infty)} f = 0.$$