Imágenes y preimágenes (repaso)

Objetivos. Repasar las definiciones y propiedades elementales de imágenes y preimágenes de conjuntos bajo mapeos.

Requisitos. Operaciones con conjuntos y sus propiedades, operaciones con familias de conjuntos y sus propiedades.

Preimágenes

1. Definición (preimagen de un conjunto bajo un mapeo). Sea $f\colon X \to Y$ y sea $B \subset Y$. La *preimagen* (o la *imagen inversa*) de B bajo f es

$$f^{-1}[B] = \{x \in X\colon\ f(x) \in B\}.$$

2. Preimagen del conjunto vacío. Sea $f\colon X \to Y$. Entonces

$$f^{-1}[\varnothing] = \varnothing.$$

3. Propiedad monótona de la preimagen. Sea $f\colon X \to Y$ y sean $B_1 \subset B_2 \subset Y$. Entonces

$$f^{-1}[B_1] \subset f^{-1}[B_2].$$

4. Preimagen de la unión de dos conjuntos. Sea $f\colon X \to Y$ y sean $B_1, B_2 \subset Y$. Entonces

$$f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

5. Preimagen de la intersección de dos conjuntos. Sea $f\colon X \to Y$ y sean $B_1, B_2 \subset Y$. Entonces

$$f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2].$$

6. Preimagen de la unión de una familia de conjuntos. Sea $f\colon X \to Y$ y sea $(B_i)_{i\in J}$ una familia de subconjuntos de Y. Entonces

$$f^{-1}\left[\bigcup_{i\in J} B_i\right] = \bigcup_{i\in J} f^{-1}[B_i].$$

7. Preimagen de la intersección de una familia de conjuntos. Sea $f\colon X \to Y$ y sea $(B_i)_{i\in J}$ una familia de subconjuntos de Y. Entonces

$$f^{-1}\left[\bigcap_{i\in J} B_i\right] = \bigcap_{i\in J} f^{-1}[B_i].$$

8. Preimagen del complemento. Sea $f\colon X \to Y$ y sea $B \subset Y$. Entonces

$$f^{-1}[Y \setminus B] = X \setminus f^{-1}[B].$$

Imágenes

9. Definición (imagen de un conjunto bajo un mapeo). Sea $f\colon X \to Y$ y sea $A \subset X$. La *imagen* del conjunto A bajo el mapeo f es

$$f[A] = \{y \in Y\colon\ \exists x \in A \quad f(x) = y\}.$$

10. Sea $f\colon X \to Y$, sea $A \subset X$ y sea $p \in A$. Entonces

$$f(p) \in f[A].$$

11. Imagen del conjunto vacío. Sea $f\colon X \to Y$. Entonces

$$f[\varnothing] = \varnothing.$$

12. Propiedad monótona de la imagen. Sea $f\colon X \to Y$ y sean $A_1 \subset A_2 \subset X$. Entonces

$$f[A_1] \subset f[A_2].$$

13. Imagen de la unión de dos conjuntos. Sea $f\colon X \to Y$ y sean $A_1, A_2 \subset X$. Entonces

$$f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2].$$

14. Imagen de la unión de una familia de conjuntos. Sea $f\colon X \to Y$ y sea $(A_i)_{i\in J}$ una familia de subconjuntos de X. Entonces

$$f\left[\bigcup_{i\in J} A_i\right] = \bigcup_{i\in J} f[A_i].$$

15. Imagen de la intersección de dos conjuntos. Sea $f\colon X \to Y$ y sean $A_1, A_2 \subset X$. Entonces

$$f[A_1 \cap A_2] \subset f[A_1] \cap f[A_2].$$

16. Construya un par de conjuntos X, Y, una función $f\colon X \to Y$ y un par de conjuntos $A_1, A_2 \subset X$ tales que

$$f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2].$$

17. Sea $f\colon X \to Y$ una función inyectiva y sean $A_1, A_2 \subset X$. Entonces

$$f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2].$$

18. Imagen del complemento. Sea $f\colon X \to Y$ y sea $A \subset X$. Entonces

$$f[X \setminus A] \subset Y \setminus f[A].$$

Dar un ejemplo cuando $f[X \setminus A] \neq Y \setminus f[A]$.

19. Tarea adicional. ¿Qué condición acerca de la función f garantiza que $f[X \setminus A] = Y \setminus f[A]$ para todo $A \subset X$?. ¿Es suficiente que f sea suprayectiva?. ¿Es suficiente que f sea inyectiva?.

Imagen de la preimagen

20. Sea $f\colon X \to Y$ y sea $B \subset Y$. Entonces

$$f[f^{-1}[B]] \subset B.$$

21. Construya un par de conjuntos X, Y, una función $f\colon X \to Y$ y un conjunto $B \subset Y$ tales que

$$f[f^{-1}[B]] \neq B.$$

22. Sea $f\colon X \to Y$ una función suprayectiva y sea $B \subset Y$. Entonces

$$f[f^{-1}[B]] = B.$$

Preimagen de la imagen

23. Sea $f\colon X \to Y$ y sea $A \subset X$. Entonces

$$A \subset f^{-1}[f[A]].$$

24. Construya un par de conjuntos X, Y, una función $f\colon X \to Y$ y un conjunto $A \subset X$ tales que

$$A \neq f^{-1}[f[A]].$$

25. Sea $f\colon X \to Y$ una función inyectiva y sea $A \subset X$. Entonces

$$A = f^{-1}[f[A]].$$