# Ideas de soluciones de algunos ejercicios (un tema de Análisis Real)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

2020-07-08

1. La derivada de la función Gamma
2. La transformada de Laplace de la función potencial
3. Una integral maravillosa
4. Una integral con exp y cos

# Plan


1. La derivada de la función Gamma
2. La transformada de Laplace de la función potencial
3. Una integral maravillosa
4. Una integral con exp y cos

# La derivada de la función Gamma

**Ejercicio.** La función $\Gamma\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ se define como

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Demostrar que

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Consideramos la función dentro de la integral y su derivada respecto al segundo argumento:

$$f(t,x) := \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}, \qquad (D_2 f)(t,x) := \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\ln(t).$$

Hay que justificar la aplicación de la regla de Leibniz.

# Un camino malo

Consideramos $f$ en el dominio $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$.

$$f(t,x)=\mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1},\qquad (D_2 f)(t,x)=\mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1}\ \ln(t).$$

Sea $h$ la mínima función que acota $f$ de manera uniforme respecto al segundo argumento:

$$h(t):=\sup_{x\in(0,+\infty)}|(D_2 f)(t,x)|.$$

Si $t>1$, entonces $x\mapsto t^{x-1}$ es creciente, y

$$h(t)=\sup_{x\in(0,+\infty)}\left(\mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1}\ \ln(t)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1}\ \ln(t)\right)=+\infty.$$

Luego $h\notin L^1((0,+\infty))$.

# Idea de un camino bueno

La derivabilidad es una propiedad local.

Es suficiente probar que el resultado se cumple en cualquier intervalo de la forma

$$(x_1, x_2), \qquad \text{con} \qquad 0 < x_1 < x_2 < +\infty,$$

porque estos intervalos cubren $(0, +\infty)$.

Si demostraremos que la fórmula

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$$

se cumple en cualquier intervalo de la forma $(x_1, x_2)$,

entonces podremos concluir que se cumple en $(0, +\infty)$.

# Idea de un camino bueno

Sean $x_1, x_2 > 0$, $x_1 < x_2$. Consideramos $f\colon (0,+\infty) \times (x_1, x_2) \to \mathbb{R}$,

$$f(t,x) = \mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1}, \qquad (D_2 f)(t,x) = \mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1}\ \ln(t).$$

Definimos $h\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$,

$$h(t) := \sup_{x \in (x_1,x_2)} |(D_2 f)(t,x)| = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t}\ t^{x_1-1}\,|\ln(t)|, & 0 < t < 1; \\ ???, & t \geq 1. \end{cases}$$

Entonces, obviamente, $|(D_2 f)(t,x)| \leq h(t)$ para $t > 0$, $x \in (x_1, x_2)$.

# Idea de un camino bueno

Para $0 < t < 1$, $h(t) = \mathrm{e}^{-t}\ t^{x_1 - 1}\,|\ln(t)|$. Demostremos que $\int_0^1 h(t)\ \mathrm{d}t < +\infty$.

Pongamos $\alpha := \dfrac{x_1}{2}$ y encontramos $C > 0$ tal que

$$\forall t \in (0,1) \qquad |\ln(t)| \le t^{-\alpha}.$$

Entonces

$$\mathrm{e}^{-t}\ t^{x_1-1}\,|\ln(t)| \le t^{2\alpha-1}\,t^{-\alpha} = \frac{1}{t^{1-\alpha}},$$

y

$$\int_0^1 h(t)\ \mathrm{d}t \le \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\alpha}} < +\infty.$$

Falta calcular $h(t)$ para $t \ge 1$ y demostrar que $\int_1^{+\infty} h(t)\ \mathrm{d}t < +\infty$.

# Plan


1. La derivada de la función Gamma
2. La transformada de Laplace de la función potencial
3. Una integral maravillosa
4. Una integral con exp y cos

# La transformada de Laplace de la función potencial

**Ejercicio.** Sean $\lambda > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, x^k \, \mathrm{d}x$$

usando la regla de Leibniz.

**Inicio de la solución.** Pongamos

$$f(x,\lambda) := \mathrm{e}^{-\lambda x}, \qquad \Phi(\lambda) := \int_0^{+\infty} f(x,\lambda)\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x.$$

Esta integral se calcula fácilmente con el cambio de variable $t = \lambda x$.

$$f(x,\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda x}, \qquad (D_2^k f)(x,\lambda) = (-1)^k\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, x^k.$$

Queremos demostrar que se puede aplicar la regla de Leibniz $k$ veces:

$$\Phi^{(k)}(\lambda) = \int_0^{+\infty} (D_2^k f)(x,\lambda)\,\mathrm{d}x.$$

Entonces la integral requerida se calculará fácilmente:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, x^k\,\mathrm{d}x = (-1)^k \int_0^{+\infty} (D_2^k f)(x,\lambda)\,\mathrm{d}x = (-1)^k \Phi^{(k)}(\lambda) = ???.$$

Demostremos que la regla de Leibniz se puede aplicar $k$ veces en cualquier intervalo de la forma $(\xi, +\infty)$, $\xi > 0$, porque los intervalos de esta forma cubren $(0, +\infty)$.

Sean $\xi > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Consideramos $f\colon (0, +\infty) \times (\xi, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x, \lambda) \coloneqq e^{-\lambda x}.$$

Definimos $h\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$h(x) \coloneqq \sup_{\lambda > \xi} |(D_2^k f)(x, \lambda)| = \sup_{\lambda > \xi} \bigl(e^{-\lambda x} x^k\bigr) = e^{-\xi x} x^k.$$

Nos falta demostrar que $h \in L^1((0, +\infty))$.

$$h(x) = \mathrm{e}^{-\xi x}\, x^k.$$

Se sabe que existe $C > 0$ tal que $t^k \leq C\, \mathrm{e}^t$ para $t > 0$. Luego

$$x^k = \frac{2^k}{\xi^k} \left( \frac{\xi x}{2} \right)^k \leq \frac{2^k}{\xi^k} C\, \mathrm{e}^{\frac{\xi x}{2}}\, .$$

De aquí es fácil ver que

$$\int_0^{+\infty} h(x)\, \mathrm{d}x < +\infty.$$

# Plan


1. La derivada de la función Gamma
2. La transformada de Laplace de la función potencial
3. Una integral maravillosa
4. Una integral con exp y cos

**Ejercicio.** Calcular la integral
$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha x^2}}{x^2}\, \mathrm{d}x.$$
Definimos $f\colon [0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,
$$f(x, \alpha) := \frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha x^2}}{x^2}.$$
Definimos $g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$,
$$g(\alpha) := \int_0^{+\infty} f(x, \alpha)\, \mathrm{d}x.$$
Mostrar que $g \in C([0, +\infty), \mathbb{R})$.

Probar que se puede aplicar la regla de Leibniz para $\alpha > 0$.

Calcular $g'(\alpha)$ para $\alpha > 0$. Calcular $g(0)$. Calcular explícitamente $g(\alpha)$.

# Sugerencias

$$f(x,\alpha) := \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha x^2}}{x^2}, \qquad g(\alpha) := \int_0^{+\infty} f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x.$$

Recordamos la fórmula para la integral de Poisson:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De aquí es fácil calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} (D_2 f)(x,\alpha)\,\mathrm{d}x.$$

# Sugerencias

Justificar la aplicación de la regla de Leibniz para $\alpha$ en $(\xi, +\infty)$, donde $\xi > 0$.
Los intervalos de esta forma cubren $(0, +\infty)$.

Falta demostrar que $g$ es continua en $[0, +\infty)$.

Es suficiente demostrar que $g$ es continua en intervalos de la forma $[0, \eta]$, $\eta > 0$.

$$u(x) := \sup_{\alpha \in [0,\eta]} f(x, \alpha) = \frac{1 - e^{-\eta x^2}}{x^2}.$$

# Sugerencias

Falta demostrar que si $\eta > 0$, entonces

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\eta x^2}}{x^2} \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

Sabemos que $\mathrm{e}^t \geq 1 + t$ para cada $t$ en $\mathbb{R}$.

Luego $1 - \mathrm{e}^{-u} \leq u$ para cada $u$ en $\mathbb{R}$.

Además, $1 - \mathrm{e}^{-u} \leq 1$ para $u > 0$.

Acotamos la integral:

$$\int_0^1 \frac{1 - \mathrm{e}^{-\eta x^2}}{x^2} \, \mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{\eta x^2}{x^2} \, \mathrm{d}x = ???, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\eta x^2}}{x^2} \, \mathrm{d}x \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = ???.$$

# Plan


1. La derivada de la función Gamma
2. La transformada de Laplace de la función potencial
3. Una integral maravillosa
4. Una integral con exp y cos

**Ejercicio.** Fijamos $a > 0$ y definimos $\Phi\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(b) := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \cos(bx)\, \mathrm{d}x.$$

Establecer la relación

$$\Phi'(b) = -\frac{b}{2a}\Phi(b).$$

Demostrar que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \cos(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}\, .$$

# Justificar la regla de Leibniz en este ejemplo

$$f(x,b) := \mathrm{e}^{-ax^2}\cos(bx), \qquad (D_2 f)(x,b) = -x\,\mathrm{e}^{-ax^2}\operatorname{sen}(bx).$$

$$\bigl|(D_2 f)(x,b)\bigr| \le x\,\mathrm{e}^{-ax^2}.$$

La siguiente integral se puede calcular con un cambio de variable:

$$\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x.$$

# Resolver la ecuación diferencial

Después de aplicar la regla de Leibniz y una integración por partes, se obtiene

$$\Phi'(b) = -\frac{b}{2a}\Phi(b).$$

Además, es fácil calcular $\Phi(0)$ usando la fórmula para la integral de Poisson. Pongamos

$$\Lambda(b) \coloneqq \ln(\Phi(b)).$$

Entonces

$$\Lambda'(b) = \frac{\Phi'(b)}{\Phi(b)} = -\frac{b}{2a}, \qquad \Lambda(b) = \Lambda(0) - \frac{b^2}{4a} = \ln(\Phi(0)) - \frac{b^2}{4a}.$$

Despejamos $\Phi(b)$:

$$\Phi(b) = \exp\big(\Lambda(b)\big) = \Phi(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}\,.$$