Hipersubespacios de espacios vectoriales

(un tema de la unidad “Transformaciones lineales acotadas”)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

12 de diciembre de 2022

Plan

Objetivos

Suponemos que V es un espacio vectorial complejo.
Puede ser de dimensión finita o de dimensión infinita.

Dado un subespacio vectorial W de V,
demostraremos que las siguientes condiciones son equivalentes:

- existe a en $V \setminus W$ tal que $V = W + \mathbb{C}a$;
- el espacio cociente V/W es de dimensión 1;
- existe un funcional lineal no nulo $f\colon V \to \mathbb{C}$ tal que $W = \ker(f)$.

Aplicaciones cercanas (en clases futuras):
estudiar propiedades de funcionales lineales acotados en espacios normados.

Prerrequisitos

- Espacios vectoriales.
- Subespacios de espacios vectoriales.
- Sumas directas de subespacios de espacios vectoriales.
- Funcionales lineales.
- El espacio cociente de un espacio vectorial sobre un subespacio.

El espacio cociente de espacios vectoriales (repaso)

Suponemos que V es un espacio vectorial complejo.

Dado un subespacio W de V, se puede definir el espacio cociente V/W.

- $a \overset{W}{\equiv} b \quad \Longleftrightarrow \quad a - b \in W,$ es una relación de equivalencia.

El espacio cociente de espacios vectoriales (repaso)

Suponemos que V es un espacio vectorial complejo.

Dado un subespacio W de V, se puede definir el espacio cociente V/W.

- $a \overset{W}{\equiv} b \quad \Longleftrightarrow \quad a - b \in W,$ es una relación de equivalencia.
- $\{b \in V\colon\ b \overset{W}{\equiv} a\} = a + W.$

El espacio cociente de espacios vectoriales (repaso)

Suponemos que V es un espacio vectorial complejo.

Dado un subespacio W de V, se puede definir el espacio cociente V/W.

- $a \overset{W}{\equiv} b \quad \Longleftrightarrow \quad a - b \in W,$ es una relación de equivalencia.
- $\{b \in V\colon\ b \overset{W}{\equiv} a\} = a + W$.
- $V/W \coloneqq \{a + W\colon\ a \in V\}$.

El espacio cociente de espacios vectoriales (repaso)

Suponemos que V es un espacio vectorial complejo.

Dado un subespacio W de V, se puede definir el espacio cociente V/W.

- $a \overset{W}{\equiv} b \quad \Longleftrightarrow \quad a - b \in W,$ es una relación de equivalencia.
- $\{b \in V\colon\ b \overset{W}{\equiv} a\} = a + W$.
- $V/W \coloneqq \{a + W\colon\ a \in V\}$.
- $(a + W) + (b + W) \coloneqq (a + b) + W, \quad \lambda \overset{V/W}{\cdot} (a + W) \coloneqq (\lambda a) + W$.

El espacio cociente de espacios vectoriales (repaso)

Suponemos que V es un espacio vectorial complejo.

Dado un subespacio W de V, se puede definir el espacio cociente V/W.

- $a \overset{W}{\equiv} b \quad \Longleftrightarrow \quad a - b \in W,$ es una relación de equivalencia.
- $\{b \in V\colon\ b \overset{W}{\equiv} a\} = a + W$.
- $V/W := \{a + W\colon\ a \in V\}$.
- $(a + W) + (b + W) := (a + b) + W, \quad \lambda \overset{V/W}{\cdot} (a + W) := (\lambda a) + W$.
- V/W es un espacio vectorial complejo.

El espacio cociente de espacios vectoriales (repaso)

Suponemos que V es un espacio vectorial complejo.

Dado un subespacio W de V, se puede definir el espacio cociente V/W.

- $a \overset{W}{\equiv} b \iff a - b \in W$, es una relación de equivalencia.
- $\{b \in V\colon\ b \overset{W}{\equiv} a\} = a + W$.
- $V/W := \{a + W\colon\ a \in V\}$.
- $(a + W) + (b + W) := (a + b) + W$, $\lambda \overset{V/W}{\cdot} (a + W) := (\lambda a) + W$.
- V/W es un espacio vectorial complejo.
- El vector cero de V/W es W.

Sobre la suma de un subespacio y un subespacio de dimensión 1

Ejercicio.

Sean V un espacio vectorial complejo, W un subespacio de V, $a \in V \setminus W$.

Sobre la suma de un subespacio y un subespacio de dimensión 1

Ejercicio.

Sean V un espacio vectorial complejo, W un subespacio de V, $a \in V \setminus W$.

Demostrar que $W \cap (\mathbb{C}a) = \{0_V\}$.

Sobre la suma de un subespacio y un subespacio de dimensión 1

Ejercicio.

Sean V un espacio vectorial complejo, W un subespacio de V, $a \in V \setminus W$.

Demostrar que $W \cap (\mathbb{C}a) = \{0_V\}$.

Demostrar que para cada elemento v de $W + \mathbb{C}a$ existe un único par $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que

$$v = w + \lambda a.$$

Sugerencia: suponer que $w_1 + \lambda_1 a = w_2 + \lambda_2 a$, con $w_1, w_2 \in W$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$,
y demostrar que $w_1 = w_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Sobre la suma de un subespacio y un subespacio de dimensión 1

Ejercicio.

Sean V un espacio vectorial complejo, W un subespacio de V, $a \in V \setminus W$.

Demostrar que $W \cap (\mathbb{C}a) = \{0_V\}$.

Demostrar que para cada elemento v de $W + \mathbb{C}a$ existe un único par $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que

$$v = w + \lambda a.$$

Sugerencia: suponer que $w_1 + \lambda_1 a = w_2 + \lambda_2 a$, con $w_1, w_2 \in W$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$,
y demostrar que $w_1 = w_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$.

En otras palabras, $W + \mathbb{C}a$ es la suma directa de W y $\mathbb{C}a$.

Plan

Criterio de hipersubespacio

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un subespacio de V.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) V/W es un espacio vectorial de dimensión 1.

(b) existe a en $V \setminus W$ tal que $V = W + \mathbb{C}a$.

Criterio de hipersubespacio

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un subespacio de V.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) V/W es un espacio vectorial de dimensión 1.

(b) existe a en $V \setminus W$ tal que $V = W + \mathbb{C}a$.

Observación.

Como vimos en el ejercicio anterior, en la condición (b) tenemos una suma directa.

Criterio de hipersubespacio

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un subespacio de V.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) V/W es un espacio vectorial de dimensión 1.

(b) existe a en $V \setminus W$ tal que $V = W + \mathbb{C}a$.

Observación.

Como vimos en el ejercicio anterior, en la condición (b) tenemos una suma directa.

Cuando W tiene una de estas propiedades, se dice que W es un hipersubespacio o subespacio de codimensión 1.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $\dim(V/W) = 1$.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $\dim(V/W) = 1$.

Elegimos $A \in V/W$ tal que $V/W = \operatorname{lin}(A)$.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $\dim(V/W) = 1$.

Elegimos $A \in V/W$ tal que $V/W = \operatorname{lin}(A)$.

Elegimos $a \in A$. Entonces $A = a + W$.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $\dim(V/W) = 1$.

Elegimos $A \in V/W$ tal que $V/W = \operatorname{lin}(A)$.

Elegimos $a \in A$. Entonces $A = a + W$.

Demostremos que $a \notin W$.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $\dim(V/W) = 1$.

Elegimos $A \in V/W$ tal que $V/W = \mathrm{lin}(A)$.

Elegimos $a \in A$. Entonces $A = a + W$.

Demostremos que $a \notin W$.

Si $a \in W$, entonces $A = W = 0_{V/W}$ y $\dim(V/W) = 0$. Contradicción.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $\dim(V/W) = 1$.

Elegimos $A \in V/W$ tal que $V/W = \operatorname{lin}(A)$.

Elegimos $a \in A$. Entonces $A = a + W$.

Demostremos que $a \notin W$.

Si $a \in W$, entonces $A = W = 0_{V/W}$ y $\dim(V/W) = 0$. Contradicción.

Demostremos que $V \subseteq W + \mathbb{C}a$.

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $\dim(V/W) = 1$.

Elegimos $A \in V/W$ tal que $V/W = \operatorname{lin}(A)$.

Elegimos $a \in A$. Entonces $A = a + W$.

Demostremos que $a \notin W$.

Si $a \in W$, entonces $A = W = 0_{V/W}$ y $\dim(V/W) = 0$. Contradicción.

Demostremos que $V \subseteq W + \mathbb{C}a$.

Sea $x \in V$.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que $\dim(V/W) = 1$.

Elegimos $A \in V/W$ tal que $V/W = \operatorname{lin}(A)$.

Elegimos $a \in A$. Entonces $A = a + W$.

Demostremos que $a \notin W$.

Si $a \in W$, entonces $A = W = 0_{V/W}$ y $\dim(V/W) = 0$. Contradicción.

Demostremos que $V \subseteq W + \mathbb{C}a$.

Sea $x \in V$. Como $x + W \in V/W = \operatorname{lin}(A)$, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $x + W = \lambda a + W$.

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que $\dim(V/W) = 1$.

Elegimos $A \in V/W$ tal que $V/W = \operatorname{lin}(A)$.

Elegimos $a \in A$. Entonces $A = a + W$.

Demostremos que $a \notin W$.

Si $a \in W$, entonces $A = W = 0_{V/W}$ y $\dim(V/W) = 0$. Contradicción.

Demostremos que $V \subseteq W + \mathbb{C}a$.

Sea $x \in V$. Como $x + W \in V/W = \operatorname{lin}(A)$, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $x + W = \lambda a + W$.

Esto implica que $x - \lambda a \in W$, $x \in W + \mathbb{C}a$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que a en $V \setminus W$ y $V = W + \mathbb{C}a$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que a en $V \setminus W$ y $V = W + \mathbb{C}a$.

Demostremos que el vector $a + W$ forma una base de V/W.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que a en $V \setminus W$ y $V = W + \mathbb{C}a$.

Demostremos que el vector $a + W$ forma una base de V/W.

Como $a \notin W$, tenemos $a + W \neq W$, esto es, $a + W \neq 0_{V/W}$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que a en $V \setminus W$ y $V = W + \mathbb{C}a$.

Demostremos que el vector $a + W$ forma una base de V/W.

Como $a \notin W$, tenemos $a + W \neq W$, esto es, $a + W \neq 0_{V/W}$.

Sea $X \in V/W$. Elegimos $x \in X$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que a en $V \setminus W$ y $V = W + \mathbb{C}a$.

Demostremos que el vector $a + W$ forma una base de V/W.

Como $a \notin W$, tenemos $a + W \neq W$, esto es, $a + W \neq 0_{V/W}$.

Sea $X \in V/W$. Elegimos $x \in X$.
Entonces existen $w \in W$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $x = w + \lambda a$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que a en $V \setminus W$ y $V = W + \mathbb{C}a$.

Demostremos que el vector $a + W$ forma una base de V/W.

Como $a \notin W$, tenemos $a + W \neq W$, esto es, $a + W \neq 0_{V/W}$.

Sea $X \in V/W$. Elegimos $x \in X$.
Entonces existen $w \in W$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $x = w + \lambda a$.
Luego $x \in \lambda a + W$, esto es, $X = \lambda a + W = \lambda(a + W)$.

Plan

Si $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal, entonces $\ker(f)$ es un subespacio de V.

Si $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal, entonces $\ker(f)$ es un subespacio de V.

Obviamente,

$$f = 0_{V\to\mathbb{C}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker(f) = V.$$

Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal no nulo.
Entonces $\ker(f)$ es un hipersubespacio en V.

Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal no nulo. Entonces $\ker(f)$ es un hipersubespacio en V.

Demostración.

Pongamos $W \coloneqq \ker(f)$. Elegimos $a \in V$ tal que $f(a) \neq 0$. Entonces $a \notin W$.

Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal no nulo.

Entonces $\ker(f)$ es un hipersubespacio en V.

Demostración.

Pongamos $W := \ker(f)$. Elegimos $a \in V$ tal que $f(a) \neq 0$. Entonces $a \notin W$.

Demostremos que $V = W + \mathbb{C}a$. Sea $x \in V$.

Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal no nulo. Entonces $\ker(f)$ es un hipersubespacio en V.

Demostración.

Pongamos $W := \ker(f)$. Elegimos $a \in V$ tal que $f(a) \neq 0$. Entonces $a \notin W$.

Demostremos que $V = W + \mathbb{C}a$. Sea $x \in V$. Pongamos

$$w := x - \frac{f(x)}{f(a)}\,a.$$

Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal no nulo. Entonces $\ker(f)$ es un hipersubespacio en V.

Demostración.

Pongamos $W := \ker(f)$. Elegimos $a \in V$ tal que $f(a) \neq 0$. Entonces $a \notin W$.

Demostremos que $V = W + \mathbb{C}a$. Sea $x \in V$. Pongamos

$$w := x - \frac{f(x)}{f(a)}\, a.$$

Entonces $f(w) = 0$,

Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal no nulo. Entonces $\ker(f)$ es un hipersubespacio en V.

Demostración.

Pongamos $W := \ker(f)$. Elegimos $a \in V$ tal que $f(a) \neq 0$. Entonces $a \notin W$.

Demostremos que $V = W + \mathbb{C}a$. Sea $x \in V$. Pongamos

$$w := x - \frac{f(x)}{f(a)}\, a.$$

Entonces $f(w) = 0$, $w \in W$,

Los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $f : V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal no nulo. Entonces $\ker(f)$ es un hipersubespacio en V.

Demostración.

Pongamos $W := \ker(f)$. Elegimos $a \in V$ tal que $f(a) \neq 0$. Entonces $a \notin W$.

Demostremos que $V = W + \mathbb{C}a$. Sea $x \in V$. Pongamos

$$w := x - \frac{f(x)}{f(a)}\, a.$$

Entonces $f(w) = 0$, $w \in W$, $x = w + \frac{f(x)}{f(a)}\, a \in W + \mathbb{C}a$.

Los hipersubespacios son núcleos de funcionales lineales no nulos

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un hipersubespacio de V.

Entonces existe un funcional lineal no nulo $f\colon V \to \mathbb{C}$ tal que $\ker(f) = W$.

Los hipersubespacios son núcleos de funcionales lineales no nulos

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un hipersubespacio de V.

Entonces existe un funcional lineal no nulo $f\colon V \to \mathbb{C}$ tal que $\ker(f) = W$.

Idea de demostración.

Sea $a \in V \setminus W$ tal que $V = W + \mathbb{C}a$. Vamos a definir $f\colon V \to \mathbb{C}$.

Los hipersubespacios son núcleos de funcionales lineales no nulos

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un hipersubespacio de V.

Entonces existe un funcional lineal no nulo $f\colon V \to \mathbb{C}$ tal que $\ker(f) = W$.

Idea de demostración.

Sea $a \in V \setminus W$ tal que $V = W + \mathbb{C}a$. Vamos a definir $f\colon V \to \mathbb{C}$.

Dado x en V, existe un único par $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$.

Pongamos $f(x) \coloneqq \lambda$.

Los hipersubespacios son núcleos de funcionales lineales no nulos

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un hipersubespacio de V.

Entonces existe un funcional lineal no nulo $f\colon V \to \mathbb{C}$ tal que $\ker(f) = W$.

Idea de demostración.

Sea $a \in V \setminus W$ tal que $V = W + \mathbb{C}a$. Vamos a definir $f\colon V \to \mathbb{C}$.

Dado x en V, existe un único par $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$.

Pongamos $f(x) := \lambda$.

Es fácil ver que f es lineal y que $\ker(f) = W$.