El cálculo holomorfo en álgebras de Banach con identidad

Dado un contorno γ en el plano complejo y un punto z en $\mathbb{C} \setminus \gamma$, el *número de vueltas* de γ alrededor de z se puede definir como

$$\operatorname{wind}(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w - z}.$$

Dado un subconjunto compacto K de $\mathbb{C}$ y un conjunto abierto Ω tal que $K \subseteq \Omega$, se puede elegir un contorno γ tal que

$$\forall z \in K \quad \operatorname{wind}(\gamma, z) = 1$$

y

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega \quad \operatorname{wind}(\gamma, z) = 0.$$

En esta situación se dice que el contorno γ abarca el conjunto K en el dominio Ω.

Entonces para cada función f holomorfa en Ω y para cada punto z en K se cumple la fórmula de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)\,\mathrm{d}w}{w - z}.$$

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e. Recordemos que para cada a en $\mathcal{A}$ y cada λ en $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(a)$,

$$R_a(\lambda) = (\lambda e - a)^{-1}.$$

1 Lema. *Sean $a \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, y sea Γ un contorno que abarca $\sigma(a)$ en $\mathbb{C}$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\Gamma \lambda^n\, R_a(\lambda) \mathrm{d}\lambda = a^n. \tag{1}$$

Demostración. Pongamos $D \coloneqq \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(a)$. La función $f\colon D \to \mathcal{A}$, definida como $f(\lambda) \coloneqq \lambda^n\, R_a(a)$, es holomorfa en D. Sea $r > \|a\|$. Entonces $\operatorname{wind}(\Gamma, z) = \operatorname{wind}(r\mathbb{T}, z) = 1$ para cada z en $\operatorname{Sp}(a)$. Esto significa que el contorno $\Gamma - r\mathbb{T}$ está contenido en D, y $\operatorname{wind}(\Gamma - r\mathbb{T}, z) = 0$ para cada z en $\mathbb{C} \setminus D$. Por el teorema integral de Cauchy (para funciones con valores en espacios de Banach),

$$\int_{\Gamma - r\mathbb{T}} f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = 0,$$

así que

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\Gamma f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{r\mathbb{T}} f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda.$$

La última integral es fácil de calcular, usando la expansión en series. Para cada λ con $|\lambda| = r$ tenemos

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{n-k-1}\,a^k\,\mathrm{d}\lambda,$$

y la serie converge de manera uniforme respecto a λ. Luego

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{r\mathbb{T}} f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} a^k\,\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{r\mathbb{T}} \lambda^{n-k-1}\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} a^k\,\delta_{k,n} = a^n.$$ □

2 Proposición. *Sea $a \in \mathcal{A}$, sea P un polinomio con coeficientes complejos en una variable, y sea Γ un contorno que abarca $\sigma(a)$ en $\mathbb{C}$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\Gamma P(\lambda)\,R_a(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = P(a). \tag{2}$$

3 Lema. *Sean $a \in \mathcal{A}$, $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(a)$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\xi\}$, Γ un contorno que abarca $\sigma(a)$ en Ω. Entonces para cada m en $\mathbb{N}$*

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\Gamma (\xi-\lambda)^{-m} R_a(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = (\xi e - a)^{-m}. \tag{3}$$

Demostración. Denotemos la integral por b_m. Si $\lambda \in \Gamma$, entonces

$$R_a(\lambda) = R_a(\xi) + (\xi - \lambda)R_a(\xi)R_a(\lambda).$$

Como $\mathrm{wind}(\Gamma, \xi) = 0$, tenemos

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}\lambda}{(\xi-\lambda)^m} = 0.$$

Luego

$$b_m = \left(\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}\lambda}{(\xi-\lambda)^m}\right) R_a(\xi) + R_a(\xi)\left(\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_\Gamma (\xi-\lambda)^{-m+1}\,R_a(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\right) = R_a(\xi) b_{m-1}.$$

Por el Lema 1, $b_0 = e = R_a(\xi)^0$, luego por inducción sobre m obtenemos $b_m = R_a(\xi)^m$ para cada m en $\mathbb{N}$. □

4 Proposición. *Sea $a \in \mathcal{A}$ y sea Q una función racional de la forma*

$$Q(\lambda) = P(\lambda) + \sum_{j,m} \frac{c_{j,m}}{(\lambda - \xi_k)^m},$$

donde P es un polinomio, la suma es finita, y los polos ξ_k están en $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}(a)$. Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ tal que Q es holomorfa en Ω, y sea Γ un contorno que abarca $\sigma(a)$ en Ω. Entonces

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\Gamma Q(\lambda) R_a(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = P(a) + \sum_{j,m} c_{j,m}(a - \xi_k)^{-m}.$$

5 Definición. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad y sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{C}$. Pongamos

$$\mathcal{A}_\Omega \coloneqq \{a \in \mathcal{A}\colon\ \operatorname{Sp}(a) \subseteq \Omega\}.$$

Para cada f en $H(\Omega)$ definimos $\widetilde{f}\colon \mathcal{A}_\Omega \to \mathcal{A}$,

$$\widetilde{f}(a) \coloneqq \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\Gamma f(\lambda) R_a(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \tag{4}$$

donde Γ es algún contorno que abarca $\operatorname{Sp}(a)$ en Ω. Pongamos

$$\widetilde{H}(\mathcal{A}_\Omega) \coloneqq \{\widetilde{f}\colon\ f \in H(\Omega)\}.$$

Algunas observaciones. El conjunto $\mathcal{A}_\Omega$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{A}$. En la fórmula (4), la función $\lambda \mapsto f(\lambda) R_a(\lambda)$ es continua. Más aún, esta función es holomorfa (con valores en $\mathcal{A}$). Por el teorema integral de Cauchy, la fórmula (4) da el mismo resultado para cualquier contorno Γ que abarca $\operatorname{Sp}(a)$ en Ω.

6 Proposición. *Si $\xi \in \Omega$, entonces $\xi e \in \mathcal{A}_\Omega$ y*

$$\widetilde{f}(\xi e) = f(\xi) e.$$

7 Proposición. *Sea $a \in \mathcal{A}_\Omega$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $H(\Omega)$ que converge uniformemente en compactos a una función g. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{f}_n(a) = \widetilde{g}(a).$$

8 Proposición. *$\widetilde{H}(\mathcal{A}_\Omega)$ es un álgebra compleja, y $f \mapsto \widetilde{f}$ es un isomorfismo de álgebras complejas. Más aún, $\widetilde{\operatorname{id}_\Omega}(a) = a$ y $\widetilde{1_\Omega}(a) = e$ para cada a en $\mathcal{A}_\Omega$.*

Demostración. Si $f \in H(\Omega)$ y $\widetilde{f} = 0$, entonces para cada ξ en Ω tenemos

$$0 = \widetilde{f}(\xi e) = f(\xi)e,$$

así que $f = 0$.

Es fácil ver que la correspondencia $f \mapsto \widetilde{f}$ es lineal. Mostremos que es multiplicativa. Sean $f, g \in H(\Omega)$, $h = fg$. Usando el teorema de Runge encontremos una sucesión de funciones racionales $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con polos en $\mathbb{C}\setminus\Omega$ que converge a f uniformemente en compactos, y una sucesión de funciones racionales $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con polos en $\mathbb{C}\setminus\Omega$ que converge a g uniformemente en compactos. Pongamos $w_n = u_n v_n$. Entonces

$$\widetilde{f}(a)\widetilde{g}(a) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{u_n}(a)\widetilde{v_n}(a) = \lim_{n\to\infty} u_n(a)v_n(a) = \lim_{n\to\infty} w_n(a) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{w_n}(a) = h(a). \quad \square$$