Formas sesquilineales hermíticas

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

11 de enero de 2023

Plan

1. Introducción
2. Formas sesquilineales hermíticas
3. Repaso de algunas propiedades de formas cuadráticas
4. Criterio de forma sesqulineal hermítica en términos de su forma cuadrática

Plan

1. Introducción
2. Formas sesquilineales hermíticas
3. Repaso de algunas propiedades de formas cuadráticas
4. Criterio de forma sesqulineal hermítica en términos de su forma cuadrática

Objetivos

- Definir el concepto de formas sesquilineales hermíticas.
- Demostrar que una forma sesquilineal f es hermítica $\iff$ los valores de q_f son reales.

Prerrequisitos

- Formas sesquilineales.

Prerrequisitos

- Formas sesquilineales.
- La forma cuadrática asociada a una forma sesquilineal.

Prerrequisitos

- Formas sesquilineales.
- La forma cuadrática asociada a una forma sesquilineal.
- La identidad de polarización (con 4 sumandos) para las formas sesquilineales.

Plan

1. Introducción
2. Formas sesquilineales hermíticas
3. Repaso de algunas propiedades de formas cuadráticas
4. Criterio de forma sesqulineal hermítica en términos de su forma cuadrática

Definición de formas sesquilineales hermíticas

Suponemos que V es un espacio vectorial complejo.

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.
Se dice que f es hermitiana o hermítica o autoadjunta, si

$$\forall a, b \in V \qquad f(b, a) = \overline{f(a, b)}.$$

La adjunta de una forma sesquilineal

Definición

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Definimos $f^*\colon V^2 \to \mathbb{C}$,

$$f^*(a, b) := \overline{f(b, a)} \qquad (a, b \in V).$$

La adjunta de una forma sesquilineal

Definición

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Definimos $f^*\colon V^2 \to \mathbb{C}$,

$$f^*(a, b) \coloneqq \overline{f(b, a)} \qquad (a, b \in V).$$

Ejercicio. Demostrar que f^* es una forma sesquilineal.

Formas sesquilineales hermíticas: varias formas equivalentes de la definición

Proposición

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\forall a, b \in V \qquad f(b,a) = \overline{f(a,b)}$;

(b) $\forall a, b \in V \qquad \overline{f(b,a)} = f(a,b)$;

(c) $f^* = f$.

Formas sesquilineales hermíticas: varias formas equivalentes de la definición

Proposición

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\forall a, b \in V \qquad f(b, a) = \overline{f(a, b)}$;

(b) $\forall a, b \in V \qquad \overline{f(b, a)} = f(a, b)$;

(c) $f^* = f$.

Ejercicio. Demostrar la proposición.

Repaso: ¿cuándo un número complejo es real?

Ejercicio. Sea $z \in \mathbb{C}$. Demostrar que

$$z \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{z} = z.$$

Repaso: ¿cuándo un número complejo es real?

Ejercicio. Sea $z \in \mathbb{C}$. Demostrar que

$$z \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{z} = z.$$

Sugerencia: escribir $z = x + \mathrm{i}\, y$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Recordar la definición de $\overline{z}$ y la definición de igualdad de números complejos.

Ejemplo de forma sesquilineal hermítica

En este ejemplo trabajamos con $V = \ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$.

Ejemplo de forma sesquilineal hermítica

En este ejemplo trabajamos con $V = \ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$.

Sea $a \in \ell^\infty$. Definimos $f\colon (\ell^2)^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, x_k\, \overline{y_k} \qquad (x, y \in \ell^2).$$

Ejemplo de forma sesquilineal hermítica

En este ejemplo trabajamos con $V = \ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$.

Sea $a \in \ell^\infty$. Definimos $f\colon (\ell^2)^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, x_k\, \overline{y_k} \qquad (x,y \in \ell^2).$$

Ejercicio. Demostrar que

$$f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall m \in \mathbb{N} \qquad a_m = 0.$$

Ejemplo de forma sesquilineal hermítica

En este ejemplo trabajamos con $V = \ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$.

Sea $a \in \ell^\infty$. Definimos $f\colon (\ell^2)^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, x_k \, \overline{y_k} \qquad (x, y \in \ell^2).$$

Ejercicio. Demostrar que

$$f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall m \in \mathbb{N} \qquad a_m = 0.$$

Sugerencia para demostrar la necesidad: calcular $f(e_m, e_m)$.

Ejemplo de forma sesquilineal hermítica, continuación

$$f(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, x_k\, \overline{y_k} \qquad (x,y \in \ell^2).$$

Ejemplo de forma sesquilineal hermítica, continuación

$$f(x, y) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, x_k\, \overline{y_k} \qquad (x, y \in \ell^2).$$

Ejercicio. Demostrar que

$$f^*(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k}\, x_k\, \overline{y_k} \qquad (x, y \in \ell^2).$$

Ejemplo de forma sesquilineal hermítica, continuación

$$f(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, x_k\, \overline{y_k} \qquad (x,y \in \ell^2).$$

Ejercicio. Demostrar que

$$f^*(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k}\, x_k\, \overline{y_k} \qquad (x,y \in \ell^2).$$

Ejercicio. Demostrar que

$$f^* = f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad a_k \in \mathbb{R}.$$

Plan

1. Introducción
2. Formas sesquilineales hermíticas
3. Repaso de algunas propiedades de formas cuadráticas
4. Criterio de forma sesqulineal hermítica en términos de su forma cuadrática

Repaso: la forma cuadrática asociada a una forma sesquilineal

Dada una forma sesqulineal $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$, definimos $q_f\colon V \to \mathbb{C}$,

$$q_f(x) \coloneqq f(x, x).$$

Repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$q_f(\lambda a)$$

Repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$q_f(\lambda a) =$$

Repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$q_f(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a)$$

Repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$q_f(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) =$$

Repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$q_f(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) = \lambda\,\overline{\lambda}\,f(a, a)$$

Repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$q_f(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) = \lambda\,\overline{\lambda}\,f(a, a) =$$

Repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$q_f(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) = \lambda\,\overline{\lambda}\,f(a, a) = |\lambda|^2\,f(a, a)$$

Repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$q_f(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) = \lambda\,\overline{\lambda}\,f(a, a) = |\lambda|^2\,f(a, a) =$$

Repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$q_f(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) = \lambda\,\overline{\lambda}\,f(a,a) = |\lambda|^2\,f(a,a) = |\lambda|^2 q_f(a).$$

Repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$q_f(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) = \lambda\,\overline{\lambda}\,f(a,a) = |\lambda|^2\,f(a,a) = |\lambda|^2 q_f(a).$$

En particular,

$$q_f(-a)$$

Repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$q_f(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) = \lambda\,\overline{\lambda}\,f(a, a) = |\lambda|^2\,f(a, a) = |\lambda|^2 q_f(a).$$

En particular,

$$q_f(-a) =$$

Repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$q_f(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) = \lambda\,\overline{\lambda}\,f(a, a) = |\lambda|^2\,f(a, a) = |\lambda|^2 q_f(a).$$

En particular,

$$q_f(-a) = q_f(a),$$

Repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$q_f(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) = \lambda\,\overline{\lambda}\,f(a,a) = |\lambda|^2\,f(a,a) = |\lambda|^2 q_f(a).$$

En particular,

$$q_f(-a) = q_f(a), \qquad q_f(\mathrm{i}\,a)$$

Repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$q_f(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) = \lambda\,\overline{\lambda}\,f(a,a) = |\lambda|^2\,f(a,a) = |\lambda|^2 q_f(a).$$

En particular,

$$q_f(-a) = q_f(a), \qquad q_f(\mathrm{i}\,a) =$$

Repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$q_f(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) = \lambda\,\overline{\lambda}\,f(a,a) = |\lambda|^2\,f(a,a) = |\lambda|^2 q_f(a).$$

En particular,

$$q_f(-a) = q_f(a), \qquad q_f(\mathrm{i}\,a) = q_f(a),$$

Repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$q_f(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) = \lambda\,\overline{\lambda}\,f(a, a) = |\lambda|^2\,f(a, a) = |\lambda|^2 q_f(a).$$

En particular,

$$q_f(-a) = q_f(a), \qquad q_f(\mathrm{i}\,a) = q_f(a), \qquad q_f(-\mathrm{i}\,a)$$

Repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$q_f(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) = \lambda\,\overline{\lambda}\,f(a,a) = |\lambda|^2\,f(a,a) = |\lambda|^2 q_f(a).$$

En particular,

$$q_f(-a) = q_f(a), \qquad q_f(\mathrm{i}\,a) = q_f(a), \qquad q_f(-\mathrm{i}\,a) =$$

Repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Sean $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$q_f(\lambda a) = f(\lambda a, \lambda a) = \lambda\,\overline{\lambda}\,f(a, a) = |\lambda|^2\,f(a, a) = |\lambda|^2 q_f(a).$$

En particular,

$$q_f(-a) = q_f(a), \qquad q_f(\mathrm{i}\,a) = q_f(a), \qquad q_f(-\mathrm{i}\,a) = q_f(a).$$

Repaso: la identidad de polarización con 4 sumandos

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Sean $a, b \in V$. Entonces

$$f(a,b) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q_f(a + \mathrm{i}^k\, b).$$

Repaso: la identidad de polarización con 4 sumandos

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Sean $a, b \in V$. Entonces

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q_f(a + \mathrm{i}^k\, b).$$

Escribimos de manera explícita los sumandos:

Repaso: la identidad de polarización con 4 sumandos

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Sean $a, b \in V$. Entonces

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q_f(a + \mathrm{i}^k\, b).$$

Escribimos de manera explícita los sumandos:

$$f(a,b) =$$

Repaso: la identidad de polarización con 4 sumandos

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Sean $a, b \in V$. Entonces

$$f(a, b) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, q_f(a + \mathrm{i}^k \, b).$$

Escribimos de manera explícita los sumandos:

$$f(a, b) = \frac{1}{4}\Big($$

Repaso: la identidad de polarización con 4 sumandos

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Sean $a, b \in V$. Entonces

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q_f(a + \mathrm{i}^k\, b).$$

Escribimos de manera explícita los sumandos:

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\Big(\, \mathrm{i}^0\, q_f(a + \mathrm{i}^0\, b)$$

Repaso: la identidad de polarización con 4 sumandos

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Sean $a, b \in V$. Entonces

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q_f(a + \mathrm{i}^k\, b).$$

Escribimos de manera explícita los sumandos:

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\Big(\, \mathrm{i}^0\, q_f(a + \mathrm{i}^0\, b) + \mathrm{i}^1\, q_f(a + \mathrm{i}^1\, b)$$

Repaso: la identidad de polarización con 4 sumandos

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Sean $a, b \in V$. Entonces

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q_f(a + \mathrm{i}^k\, b).$$

Escribimos de manera explícita los sumandos:

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\Big(\, \mathrm{i}^0\, q_f(a + \mathrm{i}^0\, b) + \mathrm{i}^1\, q_f(a + \mathrm{i}^1\, b) + \mathrm{i}^2\, q_f(a + \mathrm{i}^2\, b)$$

Repaso: la identidad de polarización con 4 sumandos

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Sean $a, b \in V$. Entonces

$$f(a,b) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q_f(a + \mathrm{i}^k\, b).$$

Escribimos de manera explícita los sumandos:

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\Big(\mathrm{i}^0\, q_f(a + \mathrm{i}^0\, b) + \mathrm{i}^1\, q_f(a + \mathrm{i}^1\, b) + \mathrm{i}^2\, q_f(a + \mathrm{i}^2\, b) + \mathrm{i}^3\, q_f(a + \mathrm{i}^3\, b)\Big).$$

Repaso: la identidad de polarización con 4 sumandos

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Sean $a, b \in V$. Entonces

$$f(a,b) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q_f(a + \mathrm{i}^k\, b).$$

Escribimos de manera explícita los sumandos:

$$f(a,b) = \frac{1}{4} \Big(\mathrm{i}^0\, q_f(a + \mathrm{i}^0\, b) + \mathrm{i}^1\, q_f(a + \mathrm{i}^1\, b) + \mathrm{i}^2\, q_f(a + \mathrm{i}^2\, b) + \mathrm{i}^3\, q_f(a + \mathrm{i}^3\, b) \Big).$$

Simplificamos las potencias de i:

Repaso: la identidad de polarización con 4 sumandos

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Sean $a, b \in V$. Entonces

$$f(a,b) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q_f(a + \mathrm{i}^k\, b).$$

Escribimos de manera explícita los sumandos:

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\Big(\mathrm{i}^0\, q_f(a + \mathrm{i}^0\, b) + \mathrm{i}^1\, q_f(a + \mathrm{i}^1\, b) + \mathrm{i}^2\, q_f(a + \mathrm{i}^2\, b) + \mathrm{i}^3\, q_f(a + \mathrm{i}^3\, b)\Big).$$

Simplificamos las potencias de i:

$$f(a,b)$$

Repaso: la identidad de polarización con 4 sumandos

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Sean $a, b \in V$. Entonces

$$f(a,b) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q_f(a + \mathrm{i}^k\, b).$$

Escribimos de manera explícita los sumandos:

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\Big(\mathrm{i}^0\, q_f(a + \mathrm{i}^0\, b) + \mathrm{i}^1\, q_f(a + \mathrm{i}^1\, b) + \mathrm{i}^2\, q_f(a + \mathrm{i}^2\, b) + \mathrm{i}^3\, q_f(a + \mathrm{i}^3\, b) \Big).$$

Simplificamos las potencias de i:

$$f(a,b) =$$

Repaso: la identidad de polarización con 4 sumandos

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Sean $a, b \in V$. Entonces

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q_f(a + \mathrm{i}^k\, b).$$

Escribimos de manera explícita los sumandos:

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\Big(\,\mathrm{i}^0\, q_f(a+\mathrm{i}^0\, b) + \mathrm{i}^1\, q_f(a+\mathrm{i}^1\, b) + \mathrm{i}^2\, q_f(a+\mathrm{i}^2\, b) + \mathrm{i}^3\, q_f(a+\mathrm{i}^3\, b)\Big).$$

Simplificamos las potencias de i:

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\Big($$

Repaso: la identidad de polarización con 4 sumandos

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Sean $a, b \in V$. Entonces

$$f(a,b) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, q_f(a + \mathrm{i}^k \, b).$$

Escribimos de manera explícita los sumandos:

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\Big(\mathrm{i}^0 \, q_f(a + \mathrm{i}^0 \, b) + \mathrm{i}^1 \, q_f(a + \mathrm{i}^1 \, b) + \mathrm{i}^2 \, q_f(a + \mathrm{i}^2 \, b) + \mathrm{i}^3 \, q_f(a + \mathrm{i}^3 \, b)\Big).$$

Simplificamos las potencias de i:

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a + b)$$

Repaso: la identidad de polarización con 4 sumandos

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Sean $a, b \in V$. Entonces

$$f(a,b) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q_f(a + \mathrm{i}^k\, b).$$

Escribimos de manera explícita los sumandos:

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\Big(\,\mathrm{i}^0\, q_f(a + \mathrm{i}^0\, b) + \mathrm{i}^1\, q_f(a + \mathrm{i}^1\, b) + \mathrm{i}^2\, q_f(a + \mathrm{i}^2\, b) + \mathrm{i}^3\, q_f(a + \mathrm{i}^3\, b)\Big).$$

Simplificamos las potencias de i:

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a + b) + \mathrm{i}\, q_f(a + \mathrm{i}\, b)$$

Repaso: la identidad de polarización con 4 sumandos

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Sean $a, b \in V$. Entonces

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q_f(a + \mathrm{i}^k\, b).$$

Escribimos de manera explícita los sumandos:

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\Big(\mathrm{i}^0\, q_f(a + \mathrm{i}^0\, b) + \mathrm{i}^1\, q_f(a + \mathrm{i}^1\, b) + \mathrm{i}^2\, q_f(a + \mathrm{i}^2\, b) + \mathrm{i}^3\, q_f(a + \mathrm{i}^3\, b)\Big).$$

Simplificamos las potencias de i:

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \mathrm{i}\, q_f(a + \mathrm{i}\, b) - q_f(a-b)$$

Repaso: la identidad de polarización con 4 sumandos

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Sean $a, b \in V$. Entonces

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q_f(a + \mathrm{i}^k\, b).$$

Escribimos de manera explícita los sumandos:

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\Big(\,\mathrm{i}^0\, q_f(a + \mathrm{i}^0\, b) + \mathrm{i}^1\, q_f(a + \mathrm{i}^1\, b) + \mathrm{i}^2\, q_f(a + \mathrm{i}^2\, b) + \mathrm{i}^3\, q_f(a + \mathrm{i}^3\, b)\Big).$$

Simplificamos las potencias de i:

$$f(a,b) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a + b) + \mathrm{i}\, q_f(a + \mathrm{i}\, b) - q_f(a - b) - \mathrm{i}\, q_f(a - \mathrm{i}\, b)\Big).$$

Plan

1. Introducción
2. Formas sesquilineales hermíticas
3. Repaso de algunas propiedades de formas cuadráticas
4. Criterio de forma sesqulineal hermítica en términos de su forma cuadrática

Criterio de forma sesqulineal hermítica en términos de su forma cuadrática

Teorema

Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal.

Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes.

(a) f es hermítica;

(b) $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que f es hermítica.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que f es hermítica.

Entonces para cada u en V obtenemos:

$$q_f(u)$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que f es hermítica.

Entonces para cada u en V obtenemos:

$$q_f(u) =$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que f es hermítica.

Entonces para cada u en V obtenemos:

$$q_f(u) = f(u, u)$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que f es hermítica.

Entonces para cada u en V obtenemos:

$$q_f(u) = f(u, u) =$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que f es hermítica.

Entonces para cada u en V obtenemos:

$$q_f(u) = f(u, u) = f^*(u, u)$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que f es hermítica.

Entonces para cada u en V obtenemos:

$$q_f(u) = f(u,u) = f^*(u,u) =$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que f es hermítica.

Entonces para cada u en V obtenemos:

$$q_f(u) = f(u, u) = f^*(u, u) = \overline{f(u, u)}$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que f es hermítica.

Entonces para cada u en V obtenemos:

$$q_f(u) = f(u,u) = f^*(u,u) = \overline{f(u,u)} =$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que f es hermítica.

Entonces para cada u en V obtenemos:

$$q_f(u) = f(u,u) = f^*(u,u) = \overline{f(u,u)} = \overline{q_f(u)},$$

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que f es hermítica.

Entonces para cada u en V obtenemos:

$$q_f(u) = f(u,u) = f^*(u,u) = \overline{f(u,u)} = \overline{q_f(u)},$$

Hemos mostrado que $\overline{q_f(u)} = q_f(u)$.

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que f es hermítica.

Entonces para cada u en V obtenemos:

$$q_f(u) = f(u,u) = f^*(u,u) = \overline{f(u,u)} = \overline{q_f(u)},$$

Hemos mostrado que $\overline{q_f(u)} = q_f(u)$.

Por lo tanto, $q_f(u) \in \mathbb{R}$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b, a)$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b, a) =$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b, a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b + a) + \mathrm{i}\, q_f(b + \mathrm{i}\, a) - q_f(b - a) - \mathrm{i}\, q_f(b - \mathrm{i}\, a)\Big).$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b, a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b + a) + \mathrm{i}\, q_f(b + \mathrm{i}\, a) - q_f(b - a) - \mathrm{i}\, q_f(b - \mathrm{i}\, a)\Big).$$

Transformamos los argumentos de q_f:

$$f(b, a)$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b+a) + \mathrm{i}\, q_f(b+\mathrm{i}\, a) - q_f(b-a) - \mathrm{i}\, q_f(b-\mathrm{i}\, a)\Big).$$

Transformamos los argumentos de q_f:

$$f(b,a) =$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b+a) + \mathrm{i}\,q_f(b+\mathrm{i}\,a) - q_f(b-a) - \mathrm{i}\,q_f(b-\mathrm{i}\,a)\Big).$$

Transformamos los argumentos de q_f:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b)$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b+a) + \mathrm{i}\,q_f(b+\mathrm{i}\,a) - q_f(b-a) - \mathrm{i}\,q_f(b-\mathrm{i}\,a)\Big).$$

Transformamos los argumentos de q_f:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) +$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b+a) + \mathrm{i}\, q_f(b+\mathrm{i}\, a) - q_f(b-a) - \mathrm{i}\, q_f(b-\mathrm{i}\, a)\Big).$$

Transformamos los argumentos de q_f:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \ \mathrm{i}\, q_f\big(\mathrm{i}\,(a-\mathrm{i}\, b)\big)$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b+a) + \mathrm{i}\, q_f(b+\mathrm{i}\, a) - q_f(b-a) - \mathrm{i}\, q_f(b-\mathrm{i}\, a)\Big).$$

Transformamos los argumentos de q_f:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \ \mathrm{i}\, q_f(\mathrm{i}\,(a-\mathrm{i}\, b)) -$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b+a) + \mathrm{i}\, q_f(b+\mathrm{i}\, a) - q_f(b-a) - \mathrm{i}\, q_f(b-\mathrm{i}\, a)\Big).$$

Transformamos los argumentos de q_f:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \ \mathrm{i}\, q_f(\mathrm{i}\,(a-\mathrm{i}\, b)) - q_f(-(a-b))$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b+a) + \mathrm{i}\, q_f(b + \mathrm{i}\, a) - q_f(b-a) - \mathrm{i}\, q_f(b - \mathrm{i}\, a)\Big).$$

Transformamos los argumentos de q_f:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \ \mathrm{i}\, q_f\big(\mathrm{i}\,(a - \mathrm{i}\, b)\big) - q_f\big(-(a-b)\big) -$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b+a) + \mathrm{i}\, q_f(b+\mathrm{i}\, a) - q_f(b-a) - \mathrm{i}\, q_f(b-\mathrm{i}\, a)\Big).$$

Transformamos los argumentos de q_f:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \mathrm{i}\, q_f(\mathrm{i}\,(a-\mathrm{i}\, b)) - q_f(-(a-b)) - \mathrm{i}\, q_f(-\mathrm{i}\,(a+\mathrm{i}\, b))\Big).$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b, a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b + a) + \mathrm{i}\, q_f(b + \mathrm{i}\, a) - q_f(b - a) - \mathrm{i}\, q_f(b - \mathrm{i}\, a)\Big).$$

Transformamos los argumentos de q_f:

$$f(b, a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a + b) + \mathrm{i}\, q_f\big(\mathrm{i}\,(a - \mathrm{i}\, b)\big) - q_f\big(-(a - b)\big) - \mathrm{i}\, q_f\big(-\mathrm{i}\,(a + \mathrm{i}\, b)\big)\Big).$$

Aplicamos el hecho que q_f es absolutamente homogénea de orden 2:

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b+a) + \mathrm{i}\, q_f(b+\mathrm{i}\, a) - q_f(b-a) - \mathrm{i}\, q_f(b-\mathrm{i}\, a)\Big).$$

Transformamos los argumentos de q_f:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \mathrm{i}\, q_f(\mathrm{i}\,(a-\mathrm{i}\, b)) - q_f(-(a-b)) - \mathrm{i}\, q_f(-\mathrm{i}\,(a+\mathrm{i}\, b))\Big).$$

Aplicamos el hecho que q_f es absolutamente homogénea de orden 2:

$$f(b,a)$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b+a) + \mathrm{i}\, q_f(b + \mathrm{i}\, a) - q_f(b-a) - \mathrm{i}\, q_f(b - \mathrm{i}\, a)\Big).$$

Transformamos los argumentos de q_f:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \mathrm{i}\, q_f(\mathrm{i}\,(a - \mathrm{i}\, b)) - q_f(-(a-b)) - \mathrm{i}\, q_f(-\mathrm{i}\,(a + \mathrm{i}\, b))\Big).$$

Aplicamos el hecho que q_f es absolutamente homogénea de orden 2:

$$f(b,a) =$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b+a) + \mathrm{i}\,q_f(b+\mathrm{i}\,a) - q_f(b-a) - \mathrm{i}\,q_f(b-\mathrm{i}\,a)\Big).$$

Transformamos los argumentos de q_f:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \ \mathrm{i}\,q_f(\mathrm{i}\,(a-\mathrm{i}\,b)) - q_f(-(a-b)) - \ \mathrm{i}\,q_f(-\mathrm{i}\,(a+\mathrm{i}\,b))\Big).$$

Aplicamos el hecho que q_f es absolutamente homogénea de orden 2:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b)$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b, a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b + a) + \mathrm{i}\, q_f(b + \mathrm{i}\, a) - q_f(b - a) - \mathrm{i}\, q_f(b - \mathrm{i}\, a)\Big).$$

Transformamos los argumentos de q_f:

$$f(b, a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a + b) + \mathrm{i}\, q_f(\mathrm{i}\,(a - \mathrm{i}\, b)) - q_f(-(a - b)) - \mathrm{i}\, q_f(-\mathrm{i}\,(a + \mathrm{i}\, b))\Big).$$

Aplicamos el hecho que q_f es absolutamente homogénea de orden 2:

$$f(b, a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a + b) +$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b+a) + \mathrm{i}\, q_f(b+\mathrm{i}\,a) - q_f(b-a) - \mathrm{i}\, q_f(b-\mathrm{i}\,a)\Big).$$

Transformamos los argumentos de q_f:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \mathrm{i}\, q_f(\mathrm{i}\,(a-\mathrm{i}\,b)) - q_f(-(a-b)) - \mathrm{i}\, q_f(-\mathrm{i}\,(a+\mathrm{i}\,b))\Big).$$

Aplicamos el hecho que q_f es absolutamente homogénea de orden 2:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \mathrm{i}\, q_f(a-\mathrm{i}\,b)$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b, a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b + a) + \mathrm{i}\, q_f(b + \mathrm{i}\, a) - q_f(b - a) - \mathrm{i}\, q_f(b - \mathrm{i}\, a)\Big).$$

Transformamos los argumentos de q_f:

$$f(b, a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a + b) + \mathrm{i}\, q_f(\mathrm{i}\,(a - \mathrm{i}\, b)) - q_f(-(a - b)) - \mathrm{i}\, q_f(-\mathrm{i}\,(a + \mathrm{i}\, b))\Big).$$

Aplicamos el hecho que q_f es absolutamente homogénea de orden 2:

$$f(b, a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a + b) + \mathrm{i}\, q_f(a - \mathrm{i}\, b) -$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b+a) + \mathrm{i}\, q_f(b+\mathrm{i}\,a) - q_f(b-a) - \mathrm{i}\, q_f(b-\mathrm{i}\,a)\Big).$$

Transformamos los argumentos de q_f:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \ \mathrm{i}\, q_f(\mathrm{i}\,(a-\mathrm{i}\,b)) - q_f(-(a-b)) - \ \mathrm{i}\, q_f(-\mathrm{i}\,(a+\mathrm{i}\,b))\Big).$$

Aplicamos el hecho que q_f es absolutamente homogénea de orden 2:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \ \mathrm{i}\, q_f(a-\mathrm{i}\,b) - q_f(a-b)$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b+a) + \mathrm{i}\, q_f(b+\mathrm{i}\, a) - q_f(b-a) - \mathrm{i}\, q_f(b-\mathrm{i}\, a)\Big).$$

Transformamos los argumentos de q_f:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \mathrm{i}\, q_f(\mathrm{i}\,(a-\mathrm{i}\, b)) - q_f(-(a-b)) - \mathrm{i}\, q_f(-\mathrm{i}\,(a+\mathrm{i}\, b))\Big).$$

Aplicamos el hecho que q_f es absolutamente homogénea de orden 2:

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \mathrm{i}\, q_f(a-\mathrm{i}\, b) - q_f(a-b) -$$

Demostración, (b)⇒(a), inicio

Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V.

Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b, a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(b + a) + \mathrm{i}\, q_f(b + \mathrm{i}\, a) - q_f(b - a) - \mathrm{i}\, q_f(b - \mathrm{i}\, a)\Big).$$

Transformamos los argumentos de q_f:

$$f(b, a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a + b) + \mathrm{i}\, q_f\big(\mathrm{i}\,(a - \mathrm{i}\, b)\big) - q_f\big(-(a - b)\big) - \mathrm{i}\, q_f\big(-\mathrm{i}\,(a + \mathrm{i}\, b)\big)\Big).$$

Aplicamos el hecho que q_f es absolutamente homogénea de orden 2:

$$f(b, a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a + b) + \mathrm{i}\, q_f(a - \mathrm{i}\, b) - q_f(a - b) - \mathrm{i}\, q_f(a + \mathrm{i}\, b)\Big).$$

Demostración, (b)⇒(a), final

Hemos mostrado que

$$f(b,a)=\frac{1}{4}\Big(q_f(a+b)+\mathrm{i}\,q_f(a-\mathrm{i}\,b)-q_f(a-b)-\mathrm{i}\,q_f(a+\mathrm{i}\,b)\Big).$$

Conjugamos ambos lados de esta igualdad.

Usamos la suposición que todos los valores de q_f son reales.

$$\overline{f(b,a)}$$

Demostración, (b)⇒(a), final

Hemos mostrado que

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \mathrm{i}\, q_f(a-\mathrm{i}\, b) - q_f(a-b) - \mathrm{i}\, q_f(a+\mathrm{i}\, b)\Big).$$

Conjugamos ambos lados de esta igualdad.

Usamos la suposición que todos los valores de q_f son reales.

$$\overline{f(b,a)} =$$

Demostración, (b)⇒(a), final

Hemos mostrado que

$$f(b, a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \mathrm{i}\, q_f(a - \mathrm{i}\, b) - q_f(a-b) - \mathrm{i}\, q_f(a + \mathrm{i}\, b)\Big).$$

Conjugamos ambos lados de esta igualdad.

Usamos la suposición que todos los valores de q_f son reales.

$$\overline{f(b, a)} = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b)$$

Demostración, (b)⇒(a), final

Hemos mostrado que

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \mathrm{i}\,q_f(a-\mathrm{i}\,b) - q_f(a-b) - \mathrm{i}\,q_f(a+\mathrm{i}\,b)\Big).$$

Conjugamos ambos lados de esta igualdad.

Usamos la suposición que todos los valores de q_f son reales.

$$\overline{f(b,a)} = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) -$$

Demostración, (b)⇒(a), final

Hemos mostrado que

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \mathrm{i}\, q_f(a-\mathrm{i}\, b) - q_f(a-b) - \mathrm{i}\, q_f(a+\mathrm{i}\, b)\Big).$$

Conjugamos ambos lados de esta igualdad.

Usamos la suposición que todos los valores de q_f son reales.

$$\overline{f(b,a)} = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) - \ \mathrm{i}\, q_f(a-\mathrm{i}\, b)$$

Demostración, (b)⇒(a), final

Hemos mostrado que

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \mathrm{i}\, q_f(a-\mathrm{i}\, b) - q_f(a-b) - \mathrm{i}\, q_f(a+\mathrm{i}\, b)\Big).$$

Conjugamos ambos lados de esta igualdad.

Usamos la suposición que todos los valores de q_f son reales.

$$\overline{f(b,a)} = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) - \ \mathrm{i}\, q_f(a-\mathrm{i}\, b) -$$

Demostración, (b)⇒(a), final

Hemos mostrado que

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \mathrm{i}\, q_f(a-\mathrm{i}\, b) - q_f(a-b) - \mathrm{i}\, q_f(a+\mathrm{i}\, b)\Big).$$

Conjugamos ambos lados de esta igualdad.

Usamos la suposición que todos los valores de q_f son reales.

$$\overline{f(b,a)} = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) - \mathrm{i}\, q_f(a-\mathrm{i}\, b) - q_f(a-b)$$

Demostración, (b)⇒(a), final

Hemos mostrado que

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \mathrm{i}\, q_f(a-\mathrm{i}\, b) - q_f(a-b) - \mathrm{i}\, q_f(a+\mathrm{i}\, b)\Big).$$

Conjugamos ambos lados de esta igualdad.

Usamos la suposición que todos los valores de q_f son reales.

$$\overline{f(b,a)} = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) - \mathrm{i}\, q_f(a-\mathrm{i}\, b) - q_f(a-b) +$$

Demostración, (b)⇒(a), final

Hemos mostrado que

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \mathrm{i}\, q_f(a-\mathrm{i}\, b) - q_f(a-b) - \mathrm{i}\, q_f(a+\mathrm{i}\, b)\Big).$$

Conjugamos ambos lados de esta igualdad.

Usamos la suposición que todos los valores de q_f son reales.

$$\overline{f(b,a)} = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) - \mathrm{i}\, q_f(a-\mathrm{i}\, b) - q_f(a-b) + \mathrm{i}\, q_f(a+\mathrm{i}\, b)\Big).$$

Demostración, (b)⇒(a), final

Hemos mostrado que

$$f(b,a)=\frac{1}{4}\Big(q_f(a+b)+\mathrm{i}\,q_f(a-\mathrm{i}\,b)-q_f(a-b)-\mathrm{i}\,q_f(a+\mathrm{i}\,b)\Big).$$

Conjugamos ambos lados de esta igualdad.

Usamos la suposición que todos los valores de q_f son reales.

$$\overline{f(b,a)}=\frac{1}{4}\Big(q_f(a+b)-\,\mathrm{i}\,q_f(a-\mathrm{i}\,b)-q_f(a-b)+\,\mathrm{i}\,q_f(a+\mathrm{i}\,b)\Big).$$

Por la identidad de polarización, el lado derecho coincide con $f(a,b)$.

Demostración, (b)⇒(a), final

Hemos mostrado que

$$f(b,a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) + \mathrm{i}\,q_f(a-\mathrm{i}\,b) - q_f(a-b) - \mathrm{i}\,q_f(a+\mathrm{i}\,b)\Big).$$

Conjugamos ambos lados de esta igualdad.

Usamos la suposición que todos los valores de q_f son reales.

$$\overline{f(b,a)} = \frac{1}{4}\Big(q_f(a+b) - \mathrm{i}\,q_f(a-\mathrm{i}\,b) - q_f(a-b) + \mathrm{i}\,q_f(a+\mathrm{i}\,b)\Big).$$

Por la identidad de polarización, el lado derecho coincide con $f(a,b)$.

Hemos demostrado que $f^* = f$.