La identidad de polarización general para las formas sesquilineales

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial complejo. Dada una forma sesquilineal $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$, le asociamos la forma cuadrática $q_f\colon V \to \mathbb{C}$,

$$q_f(x) \coloneqq f(x,x).$$

Ya hemos estudiado algunas propiedades elementales de q_f.

Objetivos. Demostrar la identidad de polarización con m sumandos ($m \ge 3$) que expresa f en términos de q_f.

Prerrequisitos. Formas sesquilineales (= funciones sesquilineales), la forma cuadrática asociada a la forma sesquilineal, raíces complejas de la unidad, la suma de la progresión geométrica.

Sumas de las raíces complejas de uno

Dado m en $\mathbb{N}$, usemos la siguiente notación:

$$\varepsilon_m \coloneqq \exp\left(\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{m}\right).$$

Vamos a usar el siguiente hecho.

1 Proposición (¿cuándo la función exponencial compleja toma el valor 1?)**.** *Sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces*

$$\exp(z) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists k \in \mathbb{Z} \qquad z = 2k\pi\,\mathrm{i}\,. \tag{1}$$

2 Proposición (las potencias de una raíz primitiva de la unidad)**.** *Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$, y sea $r \in \mathbb{Z}$. Entonces*

$$\varepsilon_m^r = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r \in m\mathbb{Z}.$$

Demostración.

$$\varepsilon_m^r = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exp\left(\frac{2r\pi\,\mathrm{i}}{m}\right) = 1$$

usamos el criterio (1)

$$\begin{aligned}
&\iff \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \frac{2r\pi\,\mathrm{i}}{m} = 2k\pi\,\mathrm{i} \\
&\iff \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad r = km \\
&\iff \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad r \in m\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

3 Proposición (repaso: la suma de la progresión geométrica)**.** *Sea* $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ *y sea* $m \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$\sum_{k=0}^{m-1} a^k = \frac{a^m - 1}{a - 1}.$$

4 Proposición (las sumas de las potencias de una raíz primitiva de la unidad)**.** *Sea* $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, *y sea* $p \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. *Entonces*

$$\sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_m^{pk} = \begin{cases} m, & p = 0; \\ 0, & p \in \{1, \ldots, m-1\}. \end{cases}$$

Demostración. Si $p = 0$, el resultado es obvio. Se $p \in \{1, \ldots, m-1\}$. Entonces $p \notin m\mathbb{Z}$, así que

$$\varepsilon_m^p \neq 1.$$

Aplicamos la fórmula de la suma de la progresión geométrica con $a = \varepsilon_m^p$:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_m^{pk} = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\varepsilon_m^p\right)^k = \frac{\varepsilon_m^{pm} - 1}{\varepsilon_m^p - 1} = \frac{0}{\varepsilon_m^p - 1} = 0.$$

□

La identidad de polarización con m sumandos para formas sesquilineales

Hay varias identidades que expresan f en términos de q_f. Vamos a demostrar una fórmula con m sumandos ($m \geq 3$) y con coeficientes cuyos valores absolutos son iguales entre si.

5 Proposición (la identidad de polarización con m sumandos para las formas sesquilineales)**.** *Sea* $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ *una forma sesquilineal. Sean* $a, b \in V$. *Sea* $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$. *Entonces*

$$f(a, b) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_m^k \, q_f(a + \varepsilon_m^k b). \tag{2}$$

Demostración. Para cada k en $\{0, 1, \ldots, m-1\}$,

$$q_f(a + \varepsilon_m^k b) = f(a + \varepsilon_m^k b, a + \varepsilon_m^k b) = q_f(a) + \varepsilon_m^{-k} f(a, b) + \varepsilon_m^k f(b, a) + q_f(b).$$

Multiplicamos por ε_m^k:

$$\varepsilon_m^k q_f(a + \varepsilon_m^k b) = \varepsilon_m^k q_f(a) + f(a, b) + \varepsilon_m^{2k} f(b, a) + \varepsilon_m^k q_f(b).$$

Sumamos ambos lados de esta igualded sobre k en $\{0, 1, \ldots, m-1\}$. Aplicando la Proposición 4 obtenemos (2). □

Como un caso particular, para $m = 4$ obtenemos la identidad de polarización con 4 sumandos.

6 Proposición (la identidad de polarización con 4 sumandos para las formas sesquilineales)**.** *Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Sean $a, b \in V$. Entonces*

$$f(a, b) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \; q_f(a + \mathrm{i}^k \, b). \tag{3}$$

7 Proposición (la correspondencia entre las formas sesquilineales y las formas cuadráticas es inyectiva)**.** *Sean $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ y $g\colon V^2 \to \mathbb{C}$ formas sesquilineales tales que $q_f = q_g$, esto es,*

$$\forall x \in V \qquad f(x, x) = g(x, x).$$

Entonces $f = g$, esto es,

$$\forall x, y \in V \qquad f(x, y) = g(x, y).$$

Demostración. Se sigue de la identidad (2). □