Redondeo de números reales hacia abajo y hacia arriba (la parte entera y el techo)

Objetivos. Repasar la definición de $\lfloor x \rfloor$ y $\lceil x \rceil$, donde $x \in \mathbb{R}$.

Requisitos. El principio de Arquímedes, el principio del buen orden.

Redondeo hacia abajo = el piso = la parte entera

1 Proposición. *Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces el conjunto*

$$L_x := \{k \in \mathbb{Z}: \quad k \le x\}$$

tiene un elemento máximo.

Demostración. Consideremos solamente el caso $x > 0$. Por el principio de Arquímedes, el siguiente conjunto es no vacío:

$$\{k \in \mathbb{N}: \ k > x\}.$$

Por el principio del buen orden, este conjunto tiene un elemento mínimo. Lo denotemos por m. Entonces $m - 1 \in L_x$ y $m \notin L_x$, así que m es el elemento máximo de L_x. $\square$

2 Ejercicio. Mostrar que si $x < 0$, entonces el conjunto $\{k \in \mathbb{Z}: \ k > x\}$ también tiene un elemento mínimo.

3 Definición (la parte entera de un número real)**.** Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces el máximo número entero no superior a x se denota por $\lfloor x \rfloor$:

$$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z}: k \le x\},$$

4 Proposición. *Sean $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$. Entonces*

$$n = \lfloor x \rfloor \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \le x < n + 1.$$

5 Ejercicio. Dado un $x > 0$, construir un n en $\mathbb{N}$ tal que tal que $\frac{1}{n} < x$.

6 Ejercicio. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que para todo n en $\mathbb{N}$ se cumple la desigualdad $x \le \frac{1}{n}$. Demostrar que $x \le 0$.

7 Proposición. *Sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$]a, +\infty[= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{k}, +\infty\right[.$$

Demostración. $\supseteq$. En efecto, para cada k en $\mathbb{N}$ tenemos

$$\left[a + \frac{1}{k}, +\infty\right[\ \subseteq \ ]a, +\infty[.$$

$\subseteq$. Sea $x > a$. Entonces $x - a > 0$. Pongamos

$$m := \left\lfloor \frac{1}{x-a} \right\rfloor + 1.$$

Entonces $m > \frac{1}{x-a}$, $x - a > \frac{1}{m}$,

$$x \in \left[a + \frac{1}{m}, +\infty\right[. \qquad \square$$

8 Proposición. *Sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$[a, +\infty[= \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[a - \frac{1}{k}, +\infty\right[.$$

Demostración. Ejercicio. $\square$

El techo de un número real

9 Ejercicio. Sea $x \in \mathbb{R}$. Pongamos

$$U_x := \{k \in \mathbb{Z} \colon \quad k \geq x\}.$$

Demostrar que el conjunto U_x tiene un elemento mínimo.

10 Definición (el techo de un número real)**.** Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces el mínimo número entero no inferior a x se denota por $\lceil x \rceil$:

$$\lceil x \rceil := \min\{k \in \mathbb{Z} \colon k \geq x\}.$$

11 Proposición. *Sean $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$. Entonces*

$$n = \lceil x \rceil \qquad \iff \qquad n < x \leq n + 1.$$

12 Ejercicio. Sea $x \in \mathbb{R}$. Encontrar n en $\mathbb{Z}$ tal que $n \geq x$.

13 Ejercicio. Dado un $x > 0$, construir n en $\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \leq x$.

14 Ejercicio. Demostrar las Proposiciones 7 y 8 usando la función $\lceil\ \rceil$.

15 Ejercicio. Demostrar que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}]0, 1/n] = \varnothing.$$