Teorema del punto fijo para funciones contractivas

1. Definición (función contractiva). Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f\colon X \to X$ se llama *contractiva* (*función contractante*, *contracción*) si existe un $L \in [0, 1)$ tal que

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) \le L d(a, b).$$

En otras palabras, una función $X \to X$ se llama contractiva si es Lipschitz continua con un coeficiente de Lipschitz estrictamente menor que 1.

2. Definición (función corta, función estrictamente corta). Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$. Se dice que f es *corta* o *no-expansiva* si

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) \le d(a, b).$$

Se dice que f es *estrictamente corta* si

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) < d(a, b).$$

3. Hay funciones estrictamente cortas que no son contractivas. Obviamente cada función contractiva es estrictamente corta. No cada función estrictamente corta es contractiva. Por ejemplo, consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante la regla

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x).$$

Como

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} < 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

el teorema del valor medio garantiza que $|f(a) - f(b)| < |a - b|$ para cualesquier $a, b \in \mathbb{R}$. Por otro lado, con la regla de L'Hospital o con un uso apropiado de límites notables uno puede ver que

$$\lim_{x \to 0} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = 1.$$

Por consecuencia,

$$\sup_{\substack{a,b \in \mathbb{R} \\ a \ne b}} \frac{|f(a) - f(b)|}{a - b} = 1,$$

y la función f no es contractiva.

4. Definición (punto fijo de una función). Sea X un conjunto, sea $f\colon X \to X$ y sea $p \in X$. Se dice que p es un *punto fijo* de f si $f(p) = p$.

5. Lema (desigualdad fundamental para funciones contractivas). Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva con un coeficiente L, $L \in [0, 1)$. Entonces para cualesquiera a, b en X

$$d(a, b) \le \frac{1}{1 - L}\big(d(a, f(a)) + d(b, f(b))\big). \tag{1}$$

Demostración. Aplicamos la desigualdad del triángulo y luego la suposición que f es contractiva con coeficiente L:

$$\begin{aligned} d(a, b) &\le d(a, f(a)) + d(f(a), f(b)) + d(f(b), b) \\ &\le d(a, f(a)) + Ld(a, b) + d(b, f(b)). \end{aligned}$$

Pasamos el sumando $Ld(a, b)$ al lado izquierdo:

$$(1 - L)d(a, b) \le d(a, f(a)) + (b, f(b)). \tag{2}$$

Por la hipótesis, $L < 1$, así que $1 - L > 0$. Dividimos ambos lados de (2) entre $1 - L$ y obtenemos (1). □

6. Lema (unicidad del punto fijo de funciones contractivas). Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva. Supongamos que $a, b \in X$, $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Entonces $a = b$.

Demostración. Aplicamos (1) a los puntos dados a y b. El lado derecho se anula, por eso concluimos que $d(a, b) = 0$ y $a = b$. □

7. Definición (iteraciones de una función cuyo contradominio coincide con el dominio). Sea X un conjunto y sea $f\colon X \to X$. Para cada n en $\mathbb{N}_0$ denotamos por $f^{[n]}$ la n-ésima iteración de f, definida de manera recursiva:

$$f^{[0]} \coloneqq \mathrm{id}_X, \qquad f^{[n+1]} \coloneqq f^{[n]} \circ f.$$

Aquí id_X es la función identidad del conjunto X:

$$\mathrm{id}_X\colon X \to X, \qquad \mathrm{id}_X(x) \coloneqq x \qquad (x \in X).$$

Notamos que $f^{[n]}\colon X \to X$ para cada n en $\mathbb{N}_0$.

8. Propiedades de las iteraciones de una función. Sean X y f como en la definición anterior. Entonces de la propiedad asociativa de la composición de funciones se puede deducir que

$$f^{[n+m]} = f^{[m]} \circ f^{[n]} = f^{[n]} \circ f^{[m]} \qquad (m, n \in \mathbb{N}_0).$$

En particular, $f^{[n+1]} = f \circ f^{[n]}$.

9. Lema (sobre las iteraciones de una función contractiva). Sea X un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva con coeficiente L, $L \in [0,1)$. Entonces para cada n en $\mathbb{N}_1$ la función $f^{[n]}$ es contractiva con coeficiente L^n.

Demostración. Se demuestra fácilmente por inducción. $\square$

10. Lema (sobre el límite de las iteraciones). Sea X un espacio métrico, sea $f\colon X \to X$ una función continua y sea $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en X que converge a un punto p, $p \in X$. Entonces p es un punto fijo de f, esto es, $f(p) = p$.

Demostración. Pasamos al límite en la igualdad $f(x_n) = x_{n+1}$. Como f es continua, $f(x_n) \to p$. Por otro lado, $x_{n+1} \to p$. Entonces $f(p) = p$. $\square$

11. Lema (la órbita de un punto bajo una función contractiva es una sucesión de Cauchy). Sea X un espacio métrico, sea $f\colon X \to X$ una función contractiva y sea x_0 un punto de X. Para cada n en $\mathbb{N}_1$ definimos x_n como $f^{[n]}(x_0)$. Entonces la sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy.

Primera demostración, usando la desigualdad fundamental. Para cualesquiera m, n en $\mathbb{N}_0$ aplicamos la desigualdad fundamental (1) a los puntos x_m y x_n:

$$d(x_m, x_n) \le \frac{1}{1-L}\bigl(d(x_m, x_{m+1}) + d(x_n, x_{n+1})\bigr).$$

Notamos que $d(x_m, x_{m+1}) = d(f^{[m]}(x_0), f^{[m]}(f(x_0))) \le L^m d(x_0, f(x_0))$ y de manera similar $d(x_n, x_{n+1}) \le L^n d(x_0, f(x_0))$. Por eso

$$d(x_m, x_n) \le \frac{d(x_0, f(x_0))}{1-L}\bigl(L^m + L^n\bigr).$$

Cuando m y n tienden a infinito, la expresión $L^m + L^n$ tiende a cero. $\square$

Segunda demostración, trabajando con sumas de progresiones geométricas. Notamos que

$$d(x_n, x_{n+1}) \le L^n d(x_0, f(x_0)).$$

Si $n < m$, entonces por la desigualdad del triángulo

$$d(x_n, x_m) \le \sum_{j=n}^{m-1} d(x_j, x_{j+1}) \le d(x_0, f(x_0)) \sum_{j=n}^{m-1} L^j \le \frac{d(x_0, f(x_0))}{1-L}\, L^n. \tag{3}$$

La última expresión tiende a cero, cuando n tiende a infinito. $\square$

12. Teorema de Banach sobre el punto fijo de la función contractiva. Sea (X, d) un espacio métrico completo, $X \neq \emptyset$, y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva con coeficiente $L \in [0, 1)$. Entonces:

I. La función f tiene un único punto fijo; lo denotemos por p.

II. Si $x_0 \in X$ y la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ está definida mediante la regla recursiva

$$x_n = f(x_{n-1}), \tag{4}$$

entonces esta sucesión converge a p, y para cada $n \in \{1, 2, \ldots\}$

$$d(x_n, p) \leq \frac{d(x_0, f(x_0))}{1 - L}\, L^n. \tag{5}$$

Demostración. La demostración sale fácilmente de los lemas anteriores. Por el Lema 6, f no puede tener dos puntos fijos diferentes entre si. La existencia del punto fijo se demuestra de manera constructiva, simultáneamente con el inciso II. Sea $x_0 \in X$. Por el Lema 11, la sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy. El espacio X es completo, por eso la sucesión tiene un límite. Lo denotamos por p. Por el Lema 10, p es un punto fijo de f. Aplicamos la desigualdad fundamental (1) a los puntos x_n y p y obtenemos (5):

$$d(x_n, p) \leq \frac{d(x_n, x_{n+1})}{1 - L} \leq \frac{d(x_0, f(x_0))}{1 - L}\, L^n. \qquad \square$$

13. Observación. La desigualdad (5) también se puede deducir de (3), pasando al límite cuando m tiende al infinito.

14. Observación: el teorema del punto fijo de Banach es constructivo. La existencia del punto fijo en este teorema se demuestra de manera constructiva, a saber, se da una receta para aproximar el punto fijo.

15. Aplicaciones. El teorema del punto fijo se utiliza en numerosas aplicaciones, tanto teóricas como prácticas: para demostrar el teorema de la función implícita (es un camino de demostración), para demostrar la existencia y unicidad de soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales, para justificar varios algoritmos de métodos numéricos y del álgebra lineal numérica.

16. Corolario del teorema de Banach para una función cuya potencia es contractiva. Sea (X, d) un espacio métrico completo, $X \neq \emptyset$, sea $f\colon X \to X$ y sea $N \in \mathbb{N}_1$ tales que la función $f^{[N]}$ es contractiva con un coeficiente L en $[0, 1)$. Entonces la función f tiene un único punto fijo p, y para cada x_0 en X la sucesión $(f^{[n]}(x_0))_{n=0}^{\infty}$ converge a p.

Demostración. Por el teorema sobre el punto fijo de una función contractiva, la función $f^{[N]}$ tiene un único punto fijo. Lo denotamos por p. Demostremos que p es un punto fijo de f. La igualdad $f^{[N]}(f(p)) = f(f^{[N]}(p)) = f(p)$ muestra que $f(p)$ es un punto fijo de $f^{[N]}$, y por la unicidad concluimos que $f(p) = p$. Demostremos que p es el *único* punto fijo de f. Si f tiene un punto fijo q, entonces es fácil mostrar por inducción que $f^{[n]}(q) = q$ para cada n en $\mathbb{N}_1$; en particular, $f^{[N]}(q) = q$, por lo cual $q = p$.

Ahora elegimos x_0 en X y mostremos que la sucesión $(f^{[n]}(x_0))_{n=0}^{\infty}$ converge a p. Denotemos por M al número

$$M \coloneqq \max_{0 \le j < N} d(f^{[j]}(x_0), f^{[j+N]}(x_0)).$$

Dado n en $\mathbb{N}_0$, dividimos n con resto entre N, es decir, encontramos r en $\{0, \ldots, N-1\}$ y m en $\mathbb{N}_0$ tales que

$$n = mN + r.$$

Aplicamos la desigualdad (5) a la iteración m de la función $f^{[N]}$ y al punto inicial $f^{[r]}(x_0)$. Entonces obtenemos que

$$d(f^{[n]}(x_0), p) \le \frac{L^m}{1-L} d(f^{[r]}(x_0), f^{[N+r]}(x_0)) \le L^{\lfloor n/N \rfloor} \frac{M}{1-L}.$$

La última expresión tiende a 0 cuando n tiende a ∞. $\square$