Espacios normados de dimensión finita

(un tema de la unidad “Espacios normados”)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

4 de noviembre de 2022

1. Introducción
2. Repaso de herramientas
3. Conexión $\mathbb{C}^n \leftrightarrow V$
4. Espacios normados de dimensión finita

Objetivos

Suponiendo que V es un espacio complejo normado de dimensión finita, vamos a demostrar las siguientes propiedades:

- existe $T\colon \mathbb{C}^n \to V$ tal que T es isomorfismo y homeomorfismo;
- todas las normas en V son equivalentes entre si;
- V es un espacio de Banach.

Prerrequisitos

- Todas las normas en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes.
- El espacio $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ es completo.
- Isomorfismos isométricos de espacios normados.

Aplicaciones

- Propiedades de subespacios de dimensión finita en espacios normados.
- Propiedades de listas de vectores finitas en espacios normados.
- Propiedades de operadores lineales de rango finito.
- Propiedades de operadores lineales compactos.

Repaso: comparación de normas en un espacio vectorial

Definición (N_2 domina a N_1)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \preceq N_2 \qquad \iff \qquad \exists C > 0 \qquad \forall v \in V \qquad N_1(v) \le C\, N_2(v).$$

Repaso: comparación de normas en un espacio vectorial

Definición (N_2 domina a N_1)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \preceq N_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists C > 0 \quad \forall v \in V \quad N_1(v) \leq C\, N_2(v).$$

$\preceq$ es un orden parcial.

Repaso: comparación de normas en un espacio vectorial

Definición (N_2 domina a N_1)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \preceq N_2 \quad\iff\quad \exists C > 0 \quad \forall v \in V \quad N_1(v) \leq C\, N_2(v).$$

$\preceq$ es un orden parcial.

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.
Denotemos por τ_1 y τ_2 las topologías correspondientes. Entonces

$$N_1 \preceq N_2 \quad\iff$$

Repaso: comparación de normas en un espacio vectorial

Definición (N_2 domina a N_1)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \preceq N_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists C > 0 \qquad \forall v \in V \qquad N_1(v) \leq C\, N_2(v).$$

$\preceq$ es un orden parcial.

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

Denotemos por τ_1 y τ_2 las topologías correspondientes. Entonces

$$N_1 \preceq N_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tau_1 \subseteq \tau_2.$$

Repaso: equivalencia de normas en un espacio vectorial

Definición (equivalencia de normas)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \asymp N_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (N_1 \preceq N_2) \quad \wedge \quad (N_2 \preceq N_1).$$

Repaso: equivalencia de normas en un espacio vectorial

Definición (equivalencia de normas)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \asymp N_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (N_1 \preceq N_2) \quad \wedge \quad (N_2 \preceq N_1).$$

$\asymp$ es una relación de equivalencia.

Repaso: equivalencia de normas en un espacio vectorial

Definición (equivalencia de normas)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \asymp N_2 \quad \Longleftrightarrow \quad (N_1 \preceq N_2) \quad \wedge \quad (N_2 \preceq N_1).$$

$\asymp$ es una relación de equivalencia.

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

Denotemos por τ_1 y τ_2 las topologías correspondientes. Entonces

$$N_1 \asymp N_2 \quad \Longleftrightarrow$$

Repaso: equivalencia de normas en un espacio vectorial

Definición (equivalencia de normas)

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.

$$N_1 \asymp N_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (N_1 \preceq N_2) \quad \wedge \quad (N_2 \preceq N_1).$$

$\asymp$ es una relación de equivalencia.

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sean N_1, N_2 normas en V.
Denotemos por τ_1 y τ_2 las topologías correspondientes. Entonces

$$N_1 \asymp N_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tau_1 = \tau_2.$$

Repaso: las normas en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes entre si

Teorema

Sea N una norma en $\mathbb{C}^n$. Entonces $N \asymp \|\cdot\|_2$.

Repaso: las normas en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes entre si

Teorema

Sea N una norma en $\mathbb{C}^n$. Entonces $N \asymp \|\cdot\|_2$.

Corolario

Sean N_1 y N_2 normas en $\mathbb{C}^n$. Entonces $N_1 \asymp N_2$.

Repaso: el espacio $\mathbb{C}^n$ con cualquier norma es completo

Proposición

El espacio normado $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ es completo.

Repaso: el espacio $\mathbb{C}^n$ con cualquier norma es completo

Proposición

El espacio normado $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ es completo.

Corolario

Sea N una norma en $\mathbb{C}^n$. Entonces $(\mathbb{C}^n, N)$ es completo.

Repaso: cada espacio vectorial complejo de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{C}^n$

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión n.

Entonces existe un isomorfismo lineal $T\colon \mathbb{C}^n \to V$.

Repaso: cada espacio vectorial complejo de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{C}^n$

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión n.

Entonces existe un isomorfismo lineal $T\colon \mathbb{C}^n \to V$.

Demostración. Sea $(b_1, \ldots, b_n)$ una base ordenada de V.

Repaso: cada espacio vectorial complejo de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{C}^n$

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión n.

Entonces existe un isomorfismo lineal $T\colon \mathbb{C}^n \to V$.

Demostración. Sea $(b_1, \ldots, b_n)$ una base ordenada de V. Definimos $T\colon \mathbb{C}^n \to V$,

$$T(\xi) :=$$

Repaso: cada espacio vectorial complejo de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{C}^n$

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión n.

Entonces existe un isomorfismo lineal $T\colon \mathbb{C}^n \to V$.

Demostración. Sea $(b_1, \ldots, b_n)$ una base ordenada de V. Definimos $T\colon \mathbb{C}^n \to V$,

$$T(\xi) := \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k.$$

Repaso: cada espacio vectorial complejo de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{C}^n$

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión n.

Entonces existe un isomorfismo lineal $T\colon \mathbb{C}^n \to V$.

Demostración. Sea $(b_1, \ldots, b_n)$ una base ordenada de V. Definimos $T\colon \mathbb{C}^n \to V$,

$$T(\xi) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k.$$

Como $(b_1, \ldots, b_n)$ es linealmente independiente,

Repaso: cada espacio vectorial complejo de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{C}^n$

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión n.

Entonces existe un isomorfismo lineal $T\colon \mathbb{C}^n \to V$.

Demostración. Sea $(b_1, \ldots, b_n)$ una base ordenada de V. Definimos $T\colon \mathbb{C}^n \to V$,

$$T(\xi) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k.$$

Como $(b_1, \ldots, b_n)$ es linealmente independiente, T es inyectiva.

Repaso: cada espacio vectorial complejo de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{C}^n$

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión n.

Entonces existe un isomorfismo lineal $T\colon \mathbb{C}^n \to V$.

Demostración. Sea $(b_1, \ldots, b_n)$ una base ordenada de V. Definimos $T\colon \mathbb{C}^n \to V$,

$$T(\xi) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k.$$

Como $(b_1, \ldots, b_n)$ es linealmente independiente, T es inyectiva.

Como $\operatorname{lin}(b_1, \ldots, b_n) = V$,

Repaso: cada espacio vectorial complejo de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{C}^n$

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión n.

Entonces existe un isomorfismo lineal $T\colon \mathbb{C}^n \to V$.

Demostración. Sea $(b_1, \ldots, b_n)$ una base ordenada de V. Definimos $T\colon \mathbb{C}^n \to V$,

$$T(\xi) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \xi_k b_k.$$

Como $(b_1, \ldots, b_n)$ es linealmente independiente, T es inyectiva.

Como $\operatorname{lin}(b_1, \ldots, b_n) = V$, T es sobre.

Definición de la "norma-preimagen" de una norma respecto a una transformación lineal inyectiva

Proposición

Sean V_1, V_2 espacios vectoriales complejos, sea N_2 una norma en V_2 y sea $T\colon V_1 \to V_2$ una transformación lineal inyectiva.

Definimos $N_1\colon V_1 \to [0, +\infty)$,

$$N_1(x) \coloneqq N_2(T(x)).$$

Entonces N_1 es una norma en V_1.

Definición de la "norma-preimagen" de una norma respecto a una transformación lineal inyectiva

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "T"] & V_2 \arrow[d, "N_2"] \\
& {[0, +\infty)}
\end{tikzcd}$$

Definición de la "norma-preimagen" de una norma respecto a una transformación lineal inyectiva

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "N_1"'] & V_2 \arrow[d, "N_2"] \\
 & {[0, +\infty)}
\end{tikzcd}$$

Demostración

N_2 es una norma, $\quad T$ es lineal e inyectiva, $\quad N_1 := N_2 \circ T$.

Demostración

N_2 es una norma, $\quad T$ es lineal e inyectiva, $\quad N_1 := N_2 \circ T$.

1. Mostremos que N_2 es subaditiva.

Demostración

N_2 es una norma, $\quad T$ es lineal e inyectiva, $\quad N_1 := N_2 \circ T$.

1. Mostremos que N_2 es subaditiva.

$$N_2(x + y)$$

Demostración

N_2 es una norma, $\quad T$ es lineal e inyectiva, $\quad N_1 := N_2 \circ T$.

1. Mostremos que N_2 es subaditiva.

$$N_2(x + y) =$$

Demostración

N_2 es una norma, $\quad T$ es lineal e inyectiva, $\quad N_1 := N_2 \circ T$.

1. Mostremos que N_2 es subaditiva.

$$N_2(x + y) = N_1(T(x + y))$$

Demostración

N_2 es una norma, $\quad T$ es lineal e inyectiva, $\quad N_1 := N_2 \circ T$.

1. Mostremos que N_2 es subaditiva.

$$N_2(x+y) = N_1(T(x+y)) =$$

Demostración

N_2 es una norma, $\quad T$ es lineal e inyectiva, $\quad N_1 := N_2 \circ T$.

1. Mostremos que N_2 es subaditiva.

$$N_2(x + y) = N_1(T(x + y)) = N_1(Tx + Ty)$$

Demostración

N_2 es una norma, T es lineal e inyectiva, $N_1 := N_2 \circ T$.

1. Mostremos que N_2 es subaditiva.

$$N_2(x+y) = N_1(T(x+y)) = N_1(Tx + Ty)$$

$$\leq$$

Demostración

N_2 es una norma, $\quad T$ es lineal e inyectiva, $\quad N_1 := N_2 \circ T$.

1. Mostremos que N_2 es subaditiva.

$$N_2(x+y) = N_1(T(x+y)) = N_1(Tx+Ty)$$

$$\leq N_1(Tx) + N_1(Ty)$$

Demostración

N_2 es una norma, $\quad T$ es lineal e inyectiva, $\quad N_1 := N_2 \circ T$.

1. Mostremos que N_2 es subaditiva.

$$N_2(x+y) = N_1(T(x+y)) = N_1(Tx+Ty)$$

$$\leq N_1(Tx) + N_1(Ty) =$$

Demostración

N_2 es una norma, $\quad T$ es lineal e inyectiva, $\quad N_1 := N_2 \circ T$.

1. Mostremos que N_2 es subaditiva.

$$\begin{aligned} N_2(x+y) &= N_1(T(x+y)) = N_1(Tx+Ty) \\ &\leq N_1(Tx) + N_1(Ty) = N_2(x) + N_2(y). \end{aligned}$$

Demostración

N_2 es una norma, $\quad T$ es lineal e inyectiva, $\quad N_1 := N_2 \circ T$.

1. Mostremos que N_2 es subaditiva.

$$\begin{aligned} N_2(x+y) &= N_1(T(x+y)) = N_1(Tx+Ty) \\ &\leq N_1(Tx) + N_1(Ty) = N_2(x) + N_2(y). \end{aligned}$$

2. Ejercicio: mostrar que N_2 es absolutamente homogénea.

Demostración

N_2 es una norma, $\quad T$ es lineal e inyectiva, $\quad N_1 := N_2 \circ T$.

1. Mostremos que N_2 es subaditiva.

$$\begin{aligned} N_2(x+y) &= N_1(T(x+y)) = N_1(Tx+Ty) \\ &\le N_1(Tx) + N_1(Ty) = N_2(x) + N_2(y). \end{aligned}$$

2. Ejercicio: mostrar que N_2 es absolutamente homogénea.

3. Sea $x \in V_1$, $x \neq 0_{V_1}$.

Demostración

N_2 es una norma, T es lineal e inyectiva, $N_1 := N_2 \circ T$.

1. Mostremos que N_2 es subaditiva.

$$
\begin{aligned}
N_2(x+y) = N_1(T(x+y)) &= N_1(Tx+Ty) \\
&\le N_1(Tx) + N_1(Ty) = N_2(x) + N_2(y).
\end{aligned}
$$

2. Ejercicio: mostrar que N_2 es absolutamente homogénea.

3. Sea $x \in V_1$, $x \neq 0_{V_1}$. Como T es inyectiva,

Demostración

N_2 es una norma, T es lineal e inyectiva, $N_1 := N_2 \circ T$.

1. Mostremos que N_2 es subaditiva.

$$\begin{aligned} N_2(x+y) &= N_1(T(x+y)) = N_1(Tx+Ty) \\ &\le N_1(Tx) + N_1(Ty) = N_2(x) + N_2(y). \end{aligned}$$

2. Ejercicio: mostrar que N_2 es absolutamente homogénea.

3. Sea $x \in V_1$, $x \neq 0_{V_1}$. Como T es inyectiva, $Tx \neq 0_{V_2}$.

Demostración

N_2 es una norma, T es lineal e inyectiva, $N_1 := N_2 \circ T$.

1. Mostremos que N_2 es subaditiva.

$$\begin{aligned} N_2(x+y) &= N_1(T(x+y)) = N_1(Tx+Ty) \\ &\le N_1(Tx) + N_1(Ty) = N_2(x) + N_2(y). \end{aligned}$$

2. Ejercicio: mostrar que N_2 es absolutamente homogénea.

3. Sea $x \in V_1$, $x \neq 0_{V_1}$. Como T es inyectiva, $Tx \neq 0_{V_2}$.

Como N_2 es una norma,

Demostración

N_2 es una norma, T es lineal e inyectiva, $N_1 := N_2 \circ T$.

1. Mostremos que N_2 es subaditiva.

$$\begin{aligned} N_2(x+y) &= N_1(T(x+y)) = N_1(Tx+Ty) \\ &\le N_1(Tx) + N_1(Ty) = N_2(x) + N_2(y). \end{aligned}$$

2. Ejercicio: mostrar que N_2 es absolutamente homogénea.

3. Sea $x \in V_1$, $x \neq 0_{V_1}$. Como T es inyectiva, $Tx \neq 0_{V_2}$.
Como N_2 es una norma, $N_2(Tx) > 0$.

Transformaciones lineales Lipschitz continuas

Proposición

Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales normados complejos y sea $T\colon V_1 \to V_2$ una transformación lineal.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\exists L > 0 \quad \forall x \in V_1 \quad \|Tx\|_{V_2} \le L\,\|x\|_{V_1}$;

(b) $\exists L > 0 \quad \forall x, y \in V_1 \quad \|Tx - Ty\|_{V_2} \le L\,\|x - y\|_{V_1}$.

Transformaciones lineales Lipschitz continuas

Proposición

Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales normados complejos y sea $T\colon V_1 \to V_2$ una transformación lineal.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\exists L > 0 \quad \forall x \in V_1 \quad \|Tx\|_{V_2} \le L\,\|x\|_{V_1};$

(b) $\exists L > 0 \quad \forall x, y \in V_1 \quad \|Tx - Ty\|_{V_2} \le L\,\|x - y\|_{V_1}.$

Demostración: ejercicio.

Si V es un espacio normado complejo de dimensión n, entonces cada isomorfismo entre $\mathbb{C}^n$ y V es un homeomorfismo

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión n,
y sea $T\colon \mathbb{C}^n \to V$ un isomorfismo lineal.
Consideramos $\mathbb{C}^n$ con la norma euclidiana $\|\cdot\|_2$.

Entonces T y T^{-1} son Lipschitz continuos.
En particular, T es un homeomorfismo.

Demostración, inicio

Definimos $N\colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$N(\alpha) := \|T\alpha\|_V.$$

Demostración, inicio

Definimos $N\colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$N(\alpha) := \|T\alpha\|_V.$$

Entonces N es una norma en $\mathbb{C}^n$.

Demostración, inicio

Definimos $N\colon \mathbb{C}^n \to [0,+\infty)$,

$$N(\alpha) := \|T\alpha\|_V.$$

Entonces N es una norma en $\mathbb{C}^n$.

Cada norma en $\mathbb{C}^n$ es equivalente a $\|\cdot\|_2$. En particular, $N \asymp \|\cdot\|_2$.

Demostración, inicio

Definimos $N\colon \mathbb{C}^n \to [0,+\infty)$,

$$N(\alpha) := \|T\alpha\|_V.$$

Entonces N es una norma en $\mathbb{C}^n$.

Cada norma en $\mathbb{C}^n$ es equivalente a $\|\cdot\|_2$. En particular, $N \asymp \|\cdot\|_2$.

Luego existen $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que

Demostración, inicio

Definimos $N\colon \mathbb{C}^n \to [0,+\infty)$,

$$N(\alpha) := \|T\alpha\|_V.$$

Entonces N es una norma en $\mathbb{C}^n$.

Cada norma en $\mathbb{C}^n$ es equivalente a $\|\cdot\|_2$. En particular, $N \asymp \|\cdot\|_2$.

Luego existen $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que para cada α en $\mathbb{C}^n$

$$N(\alpha) \le C_1 \, \|\alpha\|_2,$$

Demostración, inicio

Definimos $N\colon \mathbb{C}^n \to [0,+\infty)$,

$$N(\alpha) := \|T\alpha\|_V.$$

Entonces N es una norma en $\mathbb{C}^n$.

Cada norma en $\mathbb{C}^n$ es equivalente a $\|\cdot\|_2$. En particular, $N \asymp \|\cdot\|_2$.

Luego existen $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que para cada α en $\mathbb{C}^n$

$$N(\alpha) \le C_1\,\|\alpha\|_2, \qquad \|\alpha\|_2 \le C_2\,N(\alpha).$$

Demostración, final

Hemos definido $N(\alpha) := \|T\alpha\|_V$ y hemos mostrado que para cada α en $\mathbb{C}^n$

$$N(\alpha) \le C_1 \|\alpha\|_2, \qquad \|\alpha\|_2 \le C_2 N(\alpha).$$

Demostración, final

Hemos definido $N(\alpha) := \|T\alpha\|_V$ y hemos mostrado que para cada α en $\mathbb{C}^n$

$$N(\alpha) \leq C_1 \|\alpha\|_2, \qquad \|\alpha\|_2 \leq C_2\, N(\alpha).$$

Por la primera desigualdad,

$$\|T\alpha\|_V \leq C_1 \|\alpha\|_2.$$

Demostración, final

Hemos definido $N(\alpha) := \|T\alpha\|_V$ y hemos mostrado que para cada α en $\mathbb{C}^n$

$$N(\alpha) \leq C_1 \|\alpha\|_2, \qquad \|\alpha\|_2 \leq C_2 N(\alpha).$$

Por la primera desigualdad,

$$\|T\alpha\|_V \leq C_1 \|\alpha\|_2.$$

Por la segunda desigualdad,

$$\|\alpha\|_2 \leq C_2 \|T\alpha\|_V.$$

Demostración, final

Hemos definido $N(\alpha) := \|T\alpha\|_V$ y hemos mostrado que para cada α en $\mathbb{C}^n$

$$N(\alpha) \leq C_1 \|\alpha\|_2, \qquad \|\alpha\|_2 \leq C_2 N(\alpha).$$

Por la primera desigualdad,

$$\|T\alpha\|_V \leq C_1 \|\alpha\|_2.$$

Por la segunda desigualdad,

$$\|\alpha\|_2 \leq C_2 \|T\alpha\|_V.$$

Dado w en V, pongamos $\quad \alpha = T^{-1}w.$

Demostración, final

Hemos definido $N(\alpha) := \|T\alpha\|_V$ y hemos mostrado que para cada α en $\mathbb{C}^n$

$$N(\alpha) \le C_1\,\|\alpha\|_2, \qquad \|\alpha\|_2 \le C_2\,N(\alpha).$$

Por la primera desigualdad,

$$\|T\alpha\|_V \le C_1\,\|\alpha\|_2.$$

Por la segunda desigualdad,

$$\|\alpha\|_2 \le C_2\,\|T\alpha\|_V.$$

Dado w en V, pongamos $\quad \alpha = T^{-1}w. \quad$ Entonces $\quad \|T^{-1}w\|_2 \le C_2\,\|w\|_V.$

Equivalencia de normas en espacios normados de dimensión finita

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, y sean N_1 y N_2 normas en V. Entonces $N_1 \asymp N_2$.

Demostración

Sea $T : \mathbb{C}^n \to V$ un isomorfismo.

Demostración

Sea $T\colon \mathbb{C}^n \to V$ un isomorfismo.

Entonces existen $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ tales que

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}^n \qquad N_1(T\alpha) \le C_1\, \|\alpha\|_2, \qquad N_2(T\alpha) \le C_2\, \|\alpha\|_2,$$

$$\forall w \in V \qquad \|T^{-1}w\|_2 \le C_3\, N_1(w), \qquad \|T^{-1}w\|_2 \le C_4\, N_2(w).$$

Demostración

Sea $T\colon \mathbb{C}^n \to V$ un isomorfismo.

Entonces existen $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ tales que

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}^n \qquad N_1(T\alpha) \le C_1\,\|\alpha\|_2, \qquad N_2(T\alpha) \le C_2\,\|\alpha\|_2,$$

$$\forall w \in V \qquad \|T^{-1}w\|_2 \le C_3\,N_1(w), \qquad \|T^{-1}w\|_2 \le C_4\,N_2(w).$$

Combinamos la primera desigualdad con la cuarta:

Demostración

Sea $T\colon \mathbb{C}^n \to V$ un isomorfismo.

Entonces existen $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ tales que

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}^n \qquad N_1(T\alpha) \le C_1\,\|\alpha\|_2, \qquad N_2(T\alpha) \le C_2\,\|\alpha\|_2,$$

$$\forall w \in V \qquad \|T^{-1}w\|_2 \le C_3\,N_1(w), \qquad \|T^{-1}w\|_2 \le C_4\,N_2(w).$$

Combinamos la primera desigualdad con la cuarta: $\quad N_1(w) \le C_1\,C_4\,N_2(w).$

Demostración

Sea $T \colon \mathbb{C}^n \to V$ un isomorfismo.

Entonces existen $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ tales que

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}^n \qquad N_1(T\alpha) \le C_1 \, \|\alpha\|_2, \qquad N_2(T\alpha) \le C_2 \, \|\alpha\|_2,$$

$$\forall w \in V \qquad \|T^{-1}w\|_2 \le C_3 \, N_1(w), \qquad \|T^{-1}w\|_2 \le C_4 \, N_2(w).$$

Combinamos la primera desigualdad con la cuarta: $\quad N_1(w) \le C_1 \, C_4 \, N_2(w)$.

Combinamos la segunda desigualdad con la tercera:

Demostración

Sea $T\colon \mathbb{C}^n \to V$ un isomorfismo.

Entonces existen $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ tales que

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}^n \qquad N_1(T\alpha) \le C_1\,\|\alpha\|_2, \qquad N_2(T\alpha) \le C_2\,\|\alpha\|_2,$$

$$\forall w \in V \qquad \|T^{-1}w\|_2 \le C_3\,N_1(w), \qquad \|T^{-1}w\|_2 \le C_4\,N_2(w).$$

Combinamos la primera desigualdad con la cuarta: $N_1(w) \le C_1\,C_4\,N_2(w)$.

Combinamos la segunda desigualdad con la tercera: $N_2(w) \le C_2\,C_3\,N_1(w)$.

Espacios normados de dimensión finita

Proposición

Sea V un espacio normado complejo de dimensión finita. Entonces V es completo.

Primera demostración

Sea $T : \mathbb{C}^n \to V$ un isomorfismo lineal.

Primera demostración

Sea $T\colon \mathbb{C}^n \to V$ un isomorfismo lineal.

Definimos $N\colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$N(\alpha) := \|T(\alpha)\|_2 \qquad (\alpha \in \mathbb{C}^n).$$

Primera demostración

Sea $T\colon \mathbb{C}^n \to V$ un isomorfismo lineal.

Definimos $N\colon \mathbb{C}^n \to [0,+\infty)$,

$$N(\alpha) := \|T(\alpha)\|_2 \qquad (\alpha \in \mathbb{C}^n).$$

Sabemos que N es una norma y que $N \asymp \|\cdot\|_2$.

Primera demostración

Sea $T\colon \mathbb{C}^n \to V$ un isomorfismo lineal.

Definimos $N\colon \mathbb{C}^n \to [0,+\infty)$,

$$N(\alpha) := \|T(\alpha)\|_2 \qquad (\alpha \in \mathbb{C}^n).$$

Sabemos que N es una norma y que $N \asymp \|\cdot\|_2$.

Luego $(\mathbb{C}^n, N)$ es completo.

Primera demostración

Sea $T\colon \mathbb{C}^n \to V$ un isomorfismo lineal.

Definimos $N\colon \mathbb{C}^n \to [0, +\infty)$,

$$N(\alpha) := \|T(\alpha)\|_2 \qquad (\alpha \in \mathbb{C}^n).$$

Sabemos que N es una norma y que $N \asymp \|\cdot\|_2$.

Luego $(\mathbb{C}^n, N)$ es completo.

Como $T\colon (\mathbb{C}^n, N) \to (V, \|\cdot\|_2)$ es un isomorfismo isométrico, $(V, \|\cdot\|_2)$ es completo.

Segunda demostración

Consideramos $\mathbb{C}^n$ con la norma $\|\cdot\|_2$.

Segunda demostración

Consideramos $\mathbb{C}^n$ con la norma $\|\cdot\|_2$.

Sabemos que T y T^{-1} son Lipschitz continuos.

Segunda demostración

Consideramos $\mathbb{C}^n$ con la norma $\|\cdot\|_2$.

Sabemos que T y T^{-1} son Lipschitz continuos.

Sea $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en V.

Segunda demostración

Consideramos $\mathbb{C}^n$ con la norma $\|\cdot\|_2$.

Sabemos que T y T^{-1} son Lipschitz continuos.

Sea $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en V.

Entonces $(T^{-1}w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}^n$.

Segunda demostración

Consideramos $\mathbb{C}^n$ con la norma $\|\cdot\|_2$.

Sabemos que T y T^{-1} son Lipschitz continuos.

Sea $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en V.

Entonces $(T^{-1}w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}^n$.

Encontramos γ en $\mathbb{C}^n$ tal que $\|T^{-1}w_k - \gamma\|_2 \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Segunda demostración

Consideramos $\mathbb{C}^n$ con la norma $\|\cdot\|_2$.

Sabemos que T y T^{-1} son Lipschitz continuos.

Sea $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en V.

Entonces $(T^{-1}w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}^n$.

Encontramos γ en $\mathbb{C}^n$ tal que $\|T^{-1}w_k - \gamma\|_2 \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Luego

$$\|w_k - T\gamma\|_W \leq C\,\|T^{-1}w_k - \gamma\|_2,$$

y la sucesión $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $T\gamma$.

Los subespacios de dimensión finita son cerrados

Proposición

Sea (V, N) un espacio normado y sea W un subespacio de V de dimensión finita. Entonces W es cerrado.

Los subespacios de dimensión finita son cerrados

Proposición

Sea (V, N) un espacio normado y sea W un subespacio de V de dimensión finita. Entonces W es cerrado.

Demostración. Consideramos el espacio normado $(W, N|_W)$.

Los subespacios de dimensión finita son cerrados

Proposición

Sea (V, N) un espacio normado y sea W un subespacio de V de dimensión finita. Entonces W es cerrado.

Demostración. Consideramos el espacio normado $(W, N|_W)$.

Por la proposición anterior, este espacio es completo.

Los subespacios de dimensión finita son cerrados

Proposición

Sea (V, N) un espacio normado y sea W un subespacio de V de dimensión finita. Entonces W es cerrado.

Demostración. Consideramos el espacio normado $(W, N|_W)$.
Por la proposición anterior, este espacio es completo.
Por consecuencia, W es cerrado en V. $\square$