Marcos de Parseval finitos

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

16 de febrero de 2023

Plan

Objetivo

Estudiar marcos de Parseval finitos.

Prerrequisitos

- Marcos de Parseval (definición y criterio).
- La matriz de Gram asociada a una lista de vectores.
- Una lista de vectores es linealmente independiente $\Longleftrightarrow$ su matriz de Gram es invertible.

Plan

Definición de marco de Parseval finito

Definición

Sea H un espacio de Hilbert, sea J un conjunto finito y sea $(f_j)_{j\in J} \in H^J$.

Se dice que $(f_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para H, si para cada h en H

$$\|h\|^2 = \sum_{j\in J} |\langle h, f_j\rangle|^2.$$

Repaso: criterio de marco de Parseval (para J finito)

Proposición

Sean H un espacio de Hilbert, J un conjunto finito, $(f_j)_{j \in J} \in H^J$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $(f_j)_{j \in J}$ es un marco de Parseval para H;

(b) existe una isometría lineal $V\colon H \to \ell^2(J)$ tal que

$$(Vh)_j = \langle h, f_j \rangle \qquad (h \in H,\ j \in J);$$

(c) para cada h en H, se tiene que

$$h = \sum_{j \in J} \langle h, f_j \rangle\, f_j.$$

Cada marco de Parseval es completo en su espacio de Hilbert

Proposición

Sean H un espacio de Hilbert, J un conjunto finito, $(f_j)_{j\in J} \in H^J$.

Supongamos que $(f_j)_{j\in J}$ es un marco de Parseval para H. Entonces

$$H = \operatorname{lin}\Big(\{f_j\colon\ j \in J\}\Big).$$

Demostración

Sea

$$F := \{f_j\colon\ j \in J\}.$$

Demostración

Sea

$$F := \{f_j \colon\ j \in J\}.$$

Por la suposición, $F \subseteq H$, así que $\operatorname{lin}(F) \subseteq H$.

Demostración

Sea

$$F := \{f_j \colon \ j \in J\}.$$

Por la suposición, $F \subseteq H$, así que $\operatorname{lin}(F) \subseteq H$.

Por otro lado, por el criterio de marco de Parseval, para cada h en H tenemos que

Demostración

Sea

$$F := \{f_j\colon\ j \in J\}.$$

Por la suposición, $F \subseteq H$, así que $\operatorname{lin}(F) \subseteq H$.

Por otro lado, por el criterio de marco de Parseval, para cada h en H tenemos que

$$h$$

Demostración

Sea

$$F := \{f_j \colon\ j \in J\}.$$

Por la suposición, $F \subseteq H$, así que $\operatorname{lin}(F) \subseteq H$.

Por otro lado, por el criterio de marco de Parseval, para cada h en H tenemos que

$$h =$$

Demostración

Sea

$$F := \{f_j\colon\ j \in J\}.$$

Por la suposición, $F \subseteq H$, así que $\operatorname{lin}(F) \subseteq H$.

Por otro lado, por el criterio de marco de Parseval, para cada h en H tenemos que

$$h = \sum_{j\in J} \langle h, f_j\rangle\, f_j$$

Demostración

Sea
$$F := \{f_j \colon\ j \in J\}.$$

Por la suposición, $F \subseteq H$, así que $\operatorname{lin}(F) \subseteq H$.

Por otro lado, por el criterio de marco de Parseval, para cada h en H tenemos que

$$h = \sum_{j \in J} \langle h, f_j \rangle\, f_j \in$$

Demostración

Sea
$$F := \{f_j \colon \ j \in J\}.$$

Por la suposición, $F \subseteq H$, así que $\operatorname{lin}(F) \subseteq H$.

Por otro lado, por el criterio de marco de Parseval, para cada h en H tenemos que
$$h = \sum_{j\in J} \langle h, f_j\rangle \, f_j \in \operatorname{lin}(F).$$

Demostración

Sea

$$F := \{f_j \colon\ j \in J\}.$$

Por la suposición, $F \subseteq H$, así que $\operatorname{lin}(F) \subseteq H$.

Por otro lado, por el criterio de marco de Parseval, para cada h en H tenemos que

$$h = \sum_{j \in J} \langle h, f_j \rangle \, f_j \in \operatorname{lin}(F).$$

Esto implica que $H \subseteq \operatorname{lin}(F)$.

Plan

La matriz de Gram asociada a un marco de Parseval finito

Por simplicidad, aquí suponemos que $J = \{1, \ldots, n\}$.

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert y sean $f_1, \ldots, f_n \in H$ tales que $(f_1, \ldots, f_n)$ es un marco de Parseval para H.
Denotemos por P la matriz de Gram asociada a $f_1, \ldots, f_n$:

$$P = \left[\langle f_s, f_r \rangle\right]_{r,s=1}^{n}.$$

Entonces $P^* = P$ y $P^2 = P$.

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s}$$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} =$$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}}$$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} =$$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} = \overline{\langle f_r, f_s \rangle}$$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} = \overline{\langle f_r, f_s \rangle} =$$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} = \overline{\langle f_r, f_s \rangle} = \langle f_s, f_r \rangle$$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} = \overline{\langle f_r, f_s \rangle} = \langle f_s, f_r \rangle =$$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} = \overline{\langle f_r, f_s \rangle} = \langle f_s, f_r \rangle = P_{r,s}.$$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} = \overline{\langle f_r, f_s \rangle} = \langle f_s, f_r \rangle = P_{r,s}.$$

Demostremos que $P^2 = P$.

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} = \overline{\langle f_r, f_s \rangle} = \langle f_s, f_r \rangle = P_{r,s}.$$

Demostremos que $P^2 = P$.

$P_{r,s}$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} = \overline{\langle f_r, f_s \rangle} = \langle f_s, f_r \rangle = P_{r,s}.$$

Demostremos que $P^2 = P$.

$$P_{r,s} =$$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} = \overline{\langle f_r, f_s \rangle} = \langle f_s, f_r \rangle = P_{r,s}.$$

Demostremos que $P^2 = P$.

$P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} = \overline{\langle f_r, f_s \rangle} = \langle f_s, f_r \rangle = P_{r,s}.$$

Demostremos que $P^2 = P$.

$$P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle =$$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} = \overline{\langle f_r, f_s \rangle} = \langle f_s, f_r \rangle = P_{r,s}.$$

Demostremos que $P^2 = P$.

$$P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle f_s, f_j \rangle f_j, f_r \right\rangle$$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} = \overline{\langle f_r, f_s \rangle} = \langle f_s, f_r \rangle = P_{r,s}.$$

Demostremos que $P^2 = P$.

$$P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle f_s, f_j \rangle f_j, f_r \right\rangle =$$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} = \overline{\langle f_r, f_s \rangle} = \langle f_s, f_r \rangle = P_{r,s}.$$

Demostremos que $P^2 = P$.

$$P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle f_s, f_j \rangle f_j, f_r \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle f_s, f_j \rangle \langle f_j, f_r \rangle$$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} = \overline{\langle f_r, f_s \rangle} = \langle f_s, f_r \rangle = P_{r,s}.$$

Demostremos que $P^2 = P$.

$$P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle f_s, f_j \rangle f_j, f_r \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle f_s, f_j \rangle \langle f_j, f_r \rangle =$$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} = \overline{\langle f_r, f_s \rangle} = \langle f_s, f_r \rangle = P_{r,s}.$$

Demostremos que $P^2 = P$.

$$P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle f_s, f_j \rangle f_j, f_r \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle f_s, f_j \rangle \langle f_j, f_r \rangle = \sum_{j=1}^{n} P_{j,s} P_{r,j}$$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} = \overline{\langle f_r, f_s \rangle} = \langle f_s, f_r \rangle = P_{r,s}.$$

Demostremos que $P^2 = P$.

$$P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle f_s, f_j \rangle f_j, f_r \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle f_s, f_j \rangle \langle f_j, f_r \rangle = \sum_{j=1}^{n} P_{j,s} P_{r,j} =$$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} = \overline{\langle f_r, f_s \rangle} = \langle f_s, f_r \rangle = P_{r,s}.$$

Demostremos que $P^2 = P$.

$$P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle f_s, f_j \rangle f_j, f_r \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle f_s, f_j \rangle \langle f_j, f_r \rangle = \sum_{j=1}^{n} P_{j,s} P_{r,j} = \sum_{j=1}^{n} P_{r,j} P_{j,s}$$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} = \overline{\langle f_r, f_s \rangle} = \langle f_s, f_r \rangle = P_{r,s}.$$

Demostremos que $P^2 = P$.

$$P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle f_s, f_j \rangle f_j, f_r \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle f_s, f_j \rangle \langle f_j, f_r \rangle = \sum_{j=1}^{n} P_{j,s} P_{r,j} = \sum_{j=1}^{n} P_{r,j} P_{j,s} =$$

Demostración

Por definición, $P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle$.

Demostremos que $P^* = P$.

$$(P^*)_{r,s} = \overline{P_{s,r}} = \overline{\langle f_r, f_s \rangle} = \langle f_s, f_r \rangle = P_{r,s}.$$

Demostremos que $P^2 = P$.

$$P_{r,s} = \langle f_s, f_r \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle f_s, f_j \rangle f_j, f_r \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle f_s, f_j \rangle \langle f_j, f_r \rangle = \sum_{j=1}^{n} P_{j,s} P_{r,j} = \sum_{j=1}^{n} P_{r,j} P_{j,s} = (P^2)_{r,s}.$$

Plan

¿Cuándo un marco de Parseval finito es una base ortonormal?

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert y sean $f_1, \dots, f_n \in H$.

Supongamos que $(f_1, \dots, f_n)$ es un marco de Parseval para H.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $(f_1, \dots, f_n)$ es una base ortonormal para H;

(b) $(f_1, \dots, f_n)$ es una lista ortonormal en H;

(c) $\dim(H) = n$;

(d) $(f_1, \dots, f_n)$ es linealmente independiente.

¿Cuándo un marco de Parseval finito es una base ortonormal?

Proposición

Sea H un espacio de Hilbert y sean $f_1, \ldots, f_n \in H$.
Supongamos que $(f_1, \ldots, f_n)$ es un marco de Parseval para H.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $(f_1, \ldots, f_n)$ es una base ortonormal para H;

(b) $(f_1, \ldots, f_n)$ es una lista ortonormal en H;

(c) $\dim(H) = n$;

(d) $(f_1, \ldots, f_n)$ es linealmente independiente.

Obviamente, (a) $\Longleftrightarrow$ (b), (c) $\Longleftrightarrow$ (d), (b) $\Longrightarrow$ (d).

Demostración, (d) $\implies$ (b)

Supongamos que $(f_1, \ldots, f_n)$ es linealmente independiente.

Demostración, (d) $\implies$ (b)

Supongamos que $(f_1, \ldots, f_n)$ es linealmente independiente.

Denotemos por P la matriz de Gram asociada a $f_1, \ldots, f_n$:

$$P := G(f_1, \ldots, f_n), \qquad \text{esto es,} \qquad P = \big[\langle f_s, f_r \rangle\big]_{r,s=1}^{n}.$$

Demostración, (d) $\Longrightarrow$ (b)

Supongamos que $(f_1, \ldots, f_n)$ es linealmente independiente.

Denotemos por P la matriz de Gram asociada a $f_1, \ldots, f_n$:

$$P := G(f_1, \ldots, f_n), \qquad \text{esto es,} \qquad P = \big[\langle f_s, f_r\rangle\big]_{r,s=1}^{n}.$$

Como $(f_1, \ldots, f_n)$ es un marco de Parseval,

$$P^2 = P.$$

Demostración, (d) $\Longrightarrow$ (b)

Supongamos que $(f_1, \ldots, f_n)$ es linealmente independiente.

Denotemos por P la matriz de Gram asociada a $f_1, \ldots, f_n$:

$$P := G(f_1, \ldots, f_n), \qquad \text{esto es,} \qquad P = \big[\langle f_s, f_r\rangle\big]_{r,s=1}^{n}.$$

Como $(f_1, \ldots, f_n)$ es un marco de Parseval,

$$P^2 = P.$$

Como $(f_1, \ldots, f_n)$ es una lista linealmente independiente, P es invertible.

Demostración, (d) $\Longrightarrow$ (b)

Supongamos que $(f_1, \ldots, f_n)$ es linealmente independiente.

Denotemos por P la matriz de Gram asociada a $f_1, \ldots, f_n$:

$$P := G(f_1, \ldots, f_n), \qquad \text{esto es,} \qquad P = \big[\langle f_s, f_r\rangle\big]_{r,s=1}^{n}.$$

Como $(f_1, \ldots, f_n)$ es un marco de Parseval,

$$P^2 = P.$$

Como $(f_1, \ldots, f_n)$ es una lista linealmente independiente, P es invertible.

Por lo tanto, $P = I_n$.