Transformada finita de Fourier y frecuencias reales

Objetivos. Entender la correspondencia entre las frecuencias reales de una señal y las componentes de la transformada finita de Fourier de la señal discretizada.

Sea $(X(t))_{0\leqslant t\leqslant T}$ un proceso de tiempo continuo, por ejemplo, la intensidad de la corriente eléctrica en algún instrumento de medición. Supongamos que se leen y se guardan solamente las mediciones en los momentos discretos de tiempo $t_0,\ldots,t_{n-1}$, donde

$$t_k := \frac{kT}{n} \qquad (0 \leqslant k < n).$$

Denotemos por x_k a estos valores guardados que forman la señal discreta:

$$x_k := X(t_k). \tag{1}$$

Más aún, G es una combinación lineal de oscilaciones básicas F_j Aplicamos la transformada finita de Fourier F_n al vector x y denotemos el vector-resultado por y:

$$y = F_n x = \left[\omega_n^{jk}\right]_{j,k=0}^{n-1} x, \qquad \text{donde} \quad \omega_n = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{n}}.$$

Denotemos por $f_{n,0},\ldots,f_{n,n-1}$ a los vectores de la base finita de Fourier:

$$f_{n,j} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\omega_n^{-jk}\right]_{k=0}^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\mathrm{e}^{\frac{2\pi\,\mathrm{i}\,jk}{n}}\right]_{k=0}^{n-1}.$$

Entonces el vector $y/\sqrt{n}$ es el vector de las coordenadas del vector original x respecto a esta base:

$$x = F_n^{-1} y = \frac{1}{n} F_n^* y = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} y_j f_{n,j}. \tag{2}$$

Denotemos por F_j a la siguiente función:

$$F_j(t) := \frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi\,\mathrm{i}\,jt}{T}}.$$

Notamos que F_0 es una constante, y para cada $j > 0$ el período mínimo de F_j es $\frac{T}{j}$, así que la frecuencia de F_j es $\frac{j}{T}$. La función F_j se puede llamar "la oscilación básica" de frecuencia $\frac{j}{T}$. Los valores de la función F_j en los puntos $t_0,\ldots,t_{n-1}$ coinciden con las componentes del vector $f_{n,j}$:

$$F_j(t_k) = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi\,\mathrm{i}\,jk}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\omega_n^{-jk} = f_{n,j,k}.$$

Consideremos la combinación lineal de las oscilaciones básicas F_j con coeficientes $y_j/\sqrt{n}$:

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} y_j F_j(t). \tag{3}$$

De las fórmulas (2), (1) y (3) se sigue que la función G coincide con la función original X en los puntos t_k, por eso G se puede tratar como una aproximación de X. Notamos que el coeficiente y_j corresponde a la función F_j que tiene frecuencia $\frac{j}{T}$.

Resumen: el coeficiente y_j corresponde a la frecuencia $\frac{j}{T}$.