Extensión de un funcional lineal real acotado a un subespacio más grande

Objetivos. Demostrar un resultado que se usa como el paso de inducción matemática en la demostración del teorema de Hahn–Banach, en su forma algebraica real.

Prerrequisitos. Funcionales lineales, sumas directas de subespacios, espacios normados.

1 Lema (repaso)**.** *Sean V un espacio vectorial real, W un subespacio vectorial de V, $u \in V \setminus W$. Entonces:*

1) $W \cap (\mathbb{R}u) = \{0_V\}$;

2) para cada v en $W + \mathbb{R}u$, existe un único par $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{R}$ tal que $v = w + \lambda u$.

En otras palabras, el subespacio $W + \mathbb{R}u$ es la suma directa de W y $\mathbb{R}u$.

Idea de demostración. 1. Si $\lambda u \in W$ y $\lambda \neq 0$, entonces $u \in W$, lo cual contradice a la suposición que $u \notin W$. Por lo tanto, $\lambda = 0$ y $\lambda u = 0_V$.

2. Si $w_1 + \lambda_1 u = w_2 + \lambda_2 u$ con $w_1, w_2 \in W$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, entonces $w_1 - w_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)u$. Razonando como en el inciso 1, obtenemos que $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

2 Lema. *Sean V un espacio vectorial real, W un subespacio vectorial de V, $u \in V \setminus W$. Sea $f\colon W \to \mathbb{R}$ un funcional lineal y sea $\gamma \in \mathbb{R}$. Entonces existe un único funcional lineal $g\colon W + \mathbb{R}u \to \mathbb{R}$ tal que $g|_W = f$ y $g(u) = \gamma$.*

Demostración. 1. Para cada v en $W + \mathbb{R}u$, por el Lema 1, existe un único par (w, λ) en $W \times \mathbb{R}$ tal que $v = w + \lambda u$. Pongamos

$$g(v) \coloneqq f(w) + \lambda\gamma. \tag{1}$$

2. Mostremos que $g|_W = f$. Si $v \in W$, entonces v tiene descomposición

$$v = v + 0u.$$

Por la regla (1), $g(v) = f(v)$.

3. El vector u tiene descomposición

$$u = \underbrace{0_V}_{\in W} + 1\, u.$$

Por la regla (1), $g(u) = \gamma$.

4. Mostremos que g es aditivo. Sean $v_1, v_2 \in W + \mathbb{R}u$. Encontramos $w_1, w_2 \in W$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$v_1 = w_1 + \lambda_1 u, \qquad v_2 = w_2 + \lambda_2 u.$$

Luego

$$v_1 + v_2 = \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in W} + \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{\in \mathbb{R}} u.$$

Por la regla (1),

$$g(v_1 + v_2) = f(w_1 + w_2) + \gamma(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Transformamos la expresión obtenida usando la suposición que f es lineal:

$$g(v_1+v_2) = f(w_1) + f(w_2) + \gamma\lambda_1 + \gamma\lambda_2 = \big(f(w_1) + \gamma\lambda_1\big) + \big(f(w_2) + \gamma\lambda_2\big) = g(v_1) + g(v_2).$$

5. Se deja como un ejercicio la demostración que g es homogéneo. $\square$

La siguiente proposición se puede llamar "extensión de un funcional lineal a una dimensión más preservando la norma" o "un paso de Hahn–Banach".

3 Proposición. *Sean V un espacio vectorial real normado, W un subespacio vectorial de V, $f \in \mathcal{B}(W, \mathbb{R})$. Sea $u \in V \setminus W$. Entonces existe $g \in \mathcal{B}(W + \mathbb{R}u, \mathbb{R})$ tal que $g|_W = f$ y $\|g\| = \|f\|$.*

Consideraciones previas. Denotemos $\|f\|$ por C. Entonces para cada x en W tenemos que

$$f(x) \le C\|x\|.$$

Queremos definir g mediante la regla

$$g(x + \alpha u) = f(x) + \alpha\gamma \qquad (x \in W,\ \alpha \in \mathbb{R}).$$

Como vimos en el Lema 2, esta regla define un funcional lineal en $W + \mathbb{R}u$. Falta elegir γ de tal manera que $g(y) \le C\|y\|$ para cada y en $W + \mathbb{R}u$. El número γ debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$$|f(x) + \alpha\gamma| \le C\|x + \alpha u\| \qquad (x \in W,\ \alpha \in \mathbb{R}).$$

En particular, poniendo $\alpha = 1$ y $\alpha = -1$, vemos que γ debe satisfacer las siguientes desigualdades:

$$f(x) + \gamma \le C\|x + u\|, \qquad f(y) - \gamma \le C\|y - u\| \qquad (x \in W).$$

En forma equivalente, γ debe satisfacer las siguientes desigualdades para cada x en W:

$$f(y) - C\|y - u\| \le \gamma \le C\|x + u\| - f(x). \qquad \square$$

Demostración. Notemos que para cualesquiera x, y en W

$$f(x) + f(y) = f(x + y) = f(x + u + y - u) \le C(\|x + u\| + \|y - u\|),$$

por lo que

$$f(y) - C\|y - u\| \le C\|x + u\| - f(x).$$

Pongamos

$$\gamma \coloneqq \inf_{x \in W} \big(C\|x + u\| - f(x)\big).$$

Definimos $g\colon W + \mathbb{R}u \to \mathbb{R}$ mediante la siguiente regla:

$$g(x + \alpha u) \coloneqq f(x) + \alpha\gamma.$$

Por el Lema 2, la definición es consistente y g es lineal.

Para cada $\alpha > 0$ tenemos

$$g(x + \alpha u) = \alpha \left(f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \gamma \right) \le C\alpha \left\| \frac{x}{\alpha} + u \right\| = C\|x + \alpha u\|,$$

y

$$g(x - \alpha u) = \alpha \left(f\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \gamma \right) \le C\alpha \left\| \frac{x}{\alpha} - u \right\| = C\|x - \alpha u\|.$$

Hemos demostrado que $g(y) \le C\|y\|$ para cada y en $W + \mathbb{R}u$. Luego

$$-g(y) = g(-y) \le C\| - y\| = C\|y\|,$$

así que $|g(y)| \le C\|y\|$. Esto implica que $\|g\| \le C$. La desigualdad $\|g\| \ge \|f\|$ es obvia, porque g es una extensión de f. $\square$