Plan del primer conocimiento de la función exponencial

Objetivos. Conocer la definición y las propiedades principales de la función exponencial.

Requisitos. Series de potencias, derivada.

Este texto pequeño sigue las ideas del libro de Rudin "Real and complex analysis", Prologue.

Convergencia de series de números

- Sea $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$. Supongamos que
$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty.$$
Entonces, converge la serie
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

- Sean $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ y $b \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}_0}$ tales que para cada k en $\mathbb{N}_0$, $|a_k| \le b_k$. Supongamos que converge
$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$
Entonces, converge
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

- Sean $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$. Supongamos que $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge y existe m en $\mathbb{N}_0$ tal que $a_k = b_k$ para cada $k \ge m$. Entonces, $\sum_{k=0}^{\infty}$ converge.

- Sea $q \in \mathbb{C}$ tal que $|q| < 1$. Entonces,
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Series de potencias

- Series de potencias, fórmula de Cauchy–Hadamard para el radio de convergencia.
- Fórmula del cociente de d'Alembert.
- Derivada de la serie de potencias dentro del disco de convergencia.
- El producto de series de potencias.

Definición de la función exponencial

- La serie que define la función exponencial:

$$\exp(z) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

- El radio de convergencia.
- La derivada.
- La propiedad principal: $\exp(w+z) = \exp(w)\exp(z)$.
- $\exp(z)\exp(-z) = 1$.
- $\exp(z) \neq 0$ para cada z en $\mathbb{C}$.
- Conjugación: $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$.
- $\exp(\mathrm{i}\,x) \in \mathbb{T}$ para cada x en $\mathbb{R}$, donde

$$\mathbb{T} \coloneqq \Big\{ z \in \mathbb{C}:\ \ |z| = 1 \Big\}.$$

La función exponencial definida en el eje real

- $\exp(x) > 0$ para cada x en $\mathbb{R}$.
- $\mathrm{e} \coloneqq \exp(1)$.
- $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.
- La función $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, definida como $f(x) \coloneqq \exp(x)$, es invertible.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

Funciones hiperbólicas

- Definición en términos de la función exponencial:

$$\cosh(z) := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}, \qquad \sinh(z) := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}.$$

- Propiedades de paridad:

$$\cosh(-z) = \cosh(z), \qquad \sinh(-z) = -\sinh(z).$$

- Descomposición en series de potencias.
- Fórmulas

$$\cosh(a)\cosh(b), \qquad \cosh(a)\sinh(b), \qquad \sinh(a)\sinh(b).$$

- Fórmulas

$$\cosh(a+b), \qquad \sinh(a+b).$$

- Fórmulas

$$\cosh(a) + \cosh(b), \qquad \sinh(a) + \sinh(b).$$

Funciones trigonométricas

- Definición en términos de la función exponencial:

$$\cos(z) := \frac{\exp(\mathrm{i}\, z) + \exp(-\mathrm{i}\, z)}{2}, \qquad \sin(z) := \frac{\exp(\mathrm{i}\, z) - \exp(-\mathrm{i}\, z)}{2\,\mathrm{i}}.$$

- Paridad:

$$\cos(-z) = \cos(z), \qquad \sin(-z) = -\sin(z).$$

- Series para cos y sin.
- Derivadas de cos y sin.
- Identidad de Pitágoras:

$$\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1.$$

- Para x en $\mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \operatorname{Re}(\exp(\mathrm{i}\, x)), \qquad \sin(x) = \operatorname{Im}(\exp(\mathrm{i}\, x)).$$

Definición del número π

- Usando la serie
$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} - \frac{t^{11}}{11!} + \ldots$$
vemos que $\sin(t) > 0$ para t en $(0, 2]$.

- Concluimos que cos decrece estrictamente en $[0, 2]$.

- En la serie
$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots$$
sustituimos $t = 2$. Concluimos que $\cos(2) < -\frac{1}{3}$.

- Existe un único t_0 en $(0, 2)$ tal que $\cos(t_0) = 0$. Pongamos
$$\pi := 2t_0.$$

- Por la identidad de Pitágoras, concluimos que $\sin(\pi/2) = 1$, así que
$$\exp\left(\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2}\right) = \mathrm{i}\,.$$

- Calculamos $\exp(\mathrm{i}\,x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$ para $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = 2\pi$.

- Concluimos que
$$\exp(z + 2\pi\,\mathrm{i}) = \exp(z).$$

- Demostramos que para cada x en $(0, 2\pi)$,
$$\exp(\mathrm{i}\,x) \neq 1.$$

- Demostramos que
$$\exp(\mathrm{i}\,x) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$

- Dado u en $[0, 1]$, por el teorema del valor intermedio aplicado a cos, existe x en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\cos(x) = u$.

- Dado t en $\mathbb{T}$ tal que $\mathrm{Re}(t) \geq 0$ e $\mathrm{Im}(t) \geq 0$, existe un único x en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\exp(\mathrm{i}\,x) = t$.

- Dado t en $\mathbb{T}$, existe un único x en $[0, 2\pi)$ tal que $\exp(\mathrm{i}\,x) = t$.

- Dado w en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, existe z en $\mathbb{C}$ tal que $\exp(z) = w$.