Engrape aquí
No doble

Análisis Real, maestría. Examen parcial, junio del 2020.
Variante 1.

Sigma-álgebras, funciones medibles, medidas, varios modos de convergencia.

El examen consiste de 4 problemas y dura 120 minutos. En las soluciones hay que escribir bien los razonamientos. Los trabajos se califican de manera muy cruel.

Problema 1. *25 %.*
Sigma-álgebra finita generada por una colección de conjuntos. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Encontrar la σ-álgebra $\mathcal{F}$ sobre X generada por la siguiente colección:

$$\mathcal{G} = \big\{\{1, 2, 3\},\ \{3, 4, 5\}\big\}.$$

Hay que justificar bien la respuesta. Se puede usar sin demostración el hecho que cada álgebra finita es una σ-álgebra.

Problema 2. *25 %.*
Criterio de medibilidad de una función real. Sea X un conjunto, sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es $\mathcal{F}$-medible, esto es, $f^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ para todo conjunto B medible en $\mathbb{R}$.

(b) $f^{-1}[(a, +\infty)] \in \mathcal{F}$ para todo a en $\mathbb{R}$.

(c) $f^{-1}[(r, +\infty)] \in \mathcal{F}$ para todo r en $\mathbb{Q}$.

Indicación: hay que demostrar bien que (c) implica (b) y explicar las implicaciones (b)$\Rightarrow$(a) y (a)$\Rightarrow$(c).

Problema 3. *25 %.*
Criterio de una medida σ-finita. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Pongamos

$$\mathcal{F}_1 \coloneqq \{Y \in X\colon\ \mu(Y) < +\infty\}.$$

Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes.

(A) Existe una sucesión $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{F}_1$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$.

(B) Existe una sucesión creciente $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{F}_1$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$.

(C) Existe una sucesión disjunta $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{F}_1$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$.

Problema 4. *25 %.*
Ejemplo de análisis de varios modos de la convergencia. Se considera el espacio $X = (0, +\infty)$ con la medida de Lebesgue μ y la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}$, donde $f_n \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) \coloneqq \frac{1}{(1+x)^n}.$$

Denotemos por g la función constante cero. Demuestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge puntualmente** a g. Se puede usar la definición del límite o el criterio en términos de los conjuntos auxiliares. Determine si la convergencia es **casi uniforme**.

Engrape aquí
No doble

Análisis Real, maestría. Examen parcial, junio del 2020.
Variante 2.

Sigma-álgebras, funciones medibles, medidas, varios modos de convergencia.

El examen consiste de 4 problemas y dura 120 minutos. En las soluciones hay que escribir bien los razonamientos. Los trabajos se califican de manera muy cruel.

Problema 1. *25 %.*
Sigma-álgebra finita generada por una colección de conjuntos. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Encontrar la σ-álgebra $\mathcal{F}$ sobre X generada por la siguiente colección:

$$\mathcal{G} = \big\{\{1, 2\},\ \{1, 2, 5\}\big\}.$$

Hay que justificar bien la respuesta. Se puede usar sin demostración el hecho que cada álgebra finita es una σ-álgebra.

Problema 2. *25 %.*
La sigma-álgebra de Borel de la recta real está generada por los intervalos cerrados acotados. Denotemos por $\tau_{\mathbb{R}}$ la topología de $\mathbb{R}$ y por $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la σ-álgebra de Borel correspondiente, es decir, la σ-álgebra generada por $\tau_{\mathbb{R}}$. Sea $\mathcal{G}$ la colección de todos los intervalos cerrados acotados:

$$\mathcal{G} \coloneqq \big\{[a, b]:\ a, b \in \mathbb{R},\ a \leqslant b\big\}.$$

Demuestre que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ está generada por $\mathcal{G}$.

Problema 3. *25 %.*
El espacio vectorial de las funciones medibles que se anulan fuera de conjuntos de medida finita. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Sabemos que $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial. Para cada f en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$, pongamos

$$A_f \coloneqq \{x \in X:\ f(x) \neq 0\}.$$

Consideremos el siguiente subconjunto de $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$:

$$\Phi \coloneqq \big\{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}):\ \mu(A_f) < +\infty\big\}.$$

Demuestre que Φ es un subespacio del espacio vectorial $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$.

Problema 4. *25 %.*
Ejemplo de análisis de varios modos de la convergencia. Se considera el espacio $X = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue μ y la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}$, donde $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) \coloneqq \frac{n}{|x-n|+n}$$

Denotemos por g la función constante uno. Demuestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge puntualmente** a g. Se puede usar la definición del límite o el criterio en términos de los conjuntos auxiliares. Determine si la convergencia es **casi uniforme**.

Engrape aquí
No doble

Análisis Real, maestría. Examen parcial, junio del 2020.
Variante 3.

Sigma-álgebras, funciones medibles, medidas, varios modos de convergencia.

El examen consiste de 4 problemas y dura 120 minutos. En las soluciones hay que escribir bien los razonamientos. Los trabajos se califican de manera muy cruel.

Problema 1. *25 %.*
Sigma-álgebra finita generada por una colección de conjuntos. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Encontrar la σ-álgebra $\mathcal{F}$ sobre X generada por la siguiente colección:

$$\mathcal{G} = \big\{\{1\},\ \{4,5\}\big\}.$$

Hay que justificar bien la respuesta. Se puede usar sin demostración el hecho que cada álgebra finita es una σ-álgebra.

Problema 2. *25 %.*
Criterio de medibilidad de la función indicadora. Sea X un conjunto, $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X, $A \subseteq X$. Demuestre que las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) $A \in \mathcal{F}$,

(b) $\mathbb{1}_A \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$.

Problema 3. *25 %.*
Un criterio de la propiedad σ-aditiva. Sean X un conjunto, $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre X, $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty)$. Notemos que $\mu(X) < +\infty$. Supongamos que μ tiene las siguientes propiedades:

(P1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(P2) La función μ es finitamente aditiva: si $m \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_m$ son conjuntos disjuntos pertenecientes a $\mathcal{F}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k).$$

(P3) La función es "continua por abajo" en el siguiente sentido: si $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de elementos de $\mathcal{F}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k).$$

Demuestre que μ es σ-aditiva.

Problema 4. *25 %.*
Ejemplo de análisis de varios modos de la convergencia. Se considera el espacio $X = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue μ y la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}$, donde $f_n \colon X \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) \coloneqq \frac{n}{n + x^2}.$$

Denotemos por g la función constante uno: $g(x) = 1$ para cada x en $\mathbb{R}$. Demuestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge puntualmente** a g. Se puede usar la definición del límite o el criterio en términos de los conjuntos auxiliares. Determine si la convergencia es **casi uniforme**.

Engrape aquí
No doble

Análisis Real, maestría. Examen parcial, junio del 2020.
Variante 4.

Sigma-álgebras, funciones medibles, medidas, varios modos de convergencia.

El examen consiste de 4 problemas y dura 120 minutos. En las soluciones hay que escribir bien los razonamientos. Los trabajos se califican de manera muy cruel.

Problema 1. *25 %.*
Sigma-álgebra finita generada por una colección de conjuntos. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Encontrar la σ-álgebra $\mathcal{F}$ sobre X generada por la siguiente colección:

$$\mathcal{G} = \big\{\{3, 4, 5\},\ \{4, 5\}\big\}.$$

Hay que justificar bien la respuesta. Se puede usar sin demostración el hecho que cada álgebra finita es una σ-álgebra.

Problema 2. *25 %.*
Un criterio de σ-álgebra. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{F} \subseteq 2^X$. Supongamos que $\mathcal{F}$ tiene las siguientes propiedades.

(P1) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(P2) Para cada A en $\mathcal{F}$, $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

(P3) $\mathcal{F}$ es cerrada bajo la operación intersección de dos conjuntos: para cada A, B en $\mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(P4) $\mathcal{F}$ es cerrada bajo las uniones numerables crecientes: para cualquier sucesión creciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{F}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Demuestre que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo las uniones numerables (no necesariamente crecientes), así que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra.

Problema 3. *25 %.*
Sobre una aproximación de la función identidad por una sucesión de funciones escalonadas. Para cada n en $\mathbb{N}$, definimos $\psi_n\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ mediante la regla

$$\psi_n(t) := \begin{cases} \frac{\lfloor nt \rfloor}{n}, & 0 \leqslant t < n, \\ n, & n \leqslant t < +\infty. \end{cases}$$

Demuestre que para cada t en $[0, +\infty)$,

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = t.$$

Muestre que la sucesión $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es creciente, esto es, encuentre un punto t en $[0, +\infty)$ y un índice n en $\mathbb{N}$ tales que

$$\psi_n(t) > \psi_{n+1}(t).$$

Problema 4. *25 %.*

Ejemplo de análisis de varios modos de la convergencia. Se considera el espacio $X = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue μ y la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}$, donde $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) \coloneqq \frac{1}{|x-n|+5}.$$

Denotemos por g la función constante cero. Demuestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge puntualmente** a g. Se puede usar la definición del límite o el criterio en términos de los conjuntos auxiliares. Determine si la convergencia es **casi uniforme**.