Engrape aquí
No doble

Temas selectos de análisis funcional y real (análisis armónico), posgrado.
Segundo examen parcial. Variante α.

Grupo $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, grupo $\mathbb{Z}$ y sus caracteres, series de Fourier, coeficientes de Fourier, series de Fourier absolutamente convergentes, convergencia de series de Fourier en L^2, convolución cíclica, convengencia puntual de series de Fourier, núcleos aproximativos, aproximación uniforme de funciones continuas por sus series de Fourier promediadas, aproximación de series de Fourier y de coeficientes de Fourier por medio de la transformada finita de Fourier.

Nombre:

El examen dura 110 minutos.

Problema 1. *20 %.*
La definición del grupo $\mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$**.** Sea $T > 0$. Muestre que $T\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $\mathbb{R}$, defina la congruencia módulo T en $\mathbb{R}$ y muestre que es una relación de equivalencia (verifique solamente la propiedad transitiva). Escriba la definición de la suma de dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, demuestre que $(a + T\mathbb{Z}) + (b + T\mathbb{Z}) = a + b + T\mathbb{Z}$, y demuestre que la adición en $\mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$ es asociativa.

Problema 2. *20 %.*
Propiedades básicas de series de Fourier absolutamente convergentes. Sea $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Escriba la definición de la serie de Fourier $\breve{a}$ que corresponde a la sucesión a, justifique su convergencia uniforme y demuestre que la función $f := \breve{a}$ es continua y 2π-periódica. Demuestre que para cada n en $\mathbb{Z}$ el n-ésimo coeficiente de Fourier de la función f coincide con a_n.

Problema 3. *20 %.*
Serie de Fourier correspondiente a una sucesión cuadrado sumable. Sea $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Demuestre que existe una función f tal que $\widehat{f} = a$. Notemos que la unicidad de f se garantiza por el resultado del problema anterior.

Problema 4. *25 %.*
Núcleo de Fejér. Escriba la definición del núcleo de Fejér Φ_n en términos de los núcleos de Dirichlet, muestre que la función Φ_n se escribe como un cociente de las funciones sen, y demuestre que la sucesión $(\Phi_n)_{n=1}^{\infty}$ es un núcleo aproximativo (en otra terminología, es una sucesión de Dirac).

Problema 5. *20 %.*
Cálculo de sumas finitas trigonométricas usando la transformada finita de Fourier. Sean $a_{-n}, \ldots, a_n$ algunos números complejos. Denotemos por g_n a la suma de Fourier correspondiente:

$$g_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} a_k \, e^{kix}.$$

Muestre que los valores de la función g_n en los puntos $x_j := 2\pi j/n$ se pueden expresar a través de la transformada finita de Fourier.

Problema 6. *25 %.*
Programación. En algún lenguaje de programación escriba una función `fourier_sum_values` que realice la fórmula del problema anterior. Se puede suponer que el argumento de la función es una matriz de tamaño $n \times 2$ de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_0 \\ a_1 & a_{-1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{-n+1} \end{bmatrix}.$$

La función debe devolver el vector de los valores de g_n en los puntos $x_j := 2\pi j/n$, $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Se supone que ya existe una función `fft` que calcula la transformada finita de Fourier.

Problema 7. *25 %.*
Ejemplo: el núcleo de Poisson. Sea r un número fijo, $0 < r < 1$. Definimos la sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mediante la regla

$$a_k = r^{-|k|}.$$

Calcule la serie de Fourier f que corresponde a esta sucesión. En algún lenguaje de programación escriba una función `test_poisson_kernel` de dos argumentos r y n que calcule y devuelva el número

$$\max_{0\leqslant j\leqslant n-1} |f(x_j) - g_n(x_j)|,$$

donde $x_j := 2\pi j/n$, los valores de las sumas parciales g_n se calculan con la función `fourier_sum_values` del problema anterior, y los valores de f se calculan por fórmula exacta deducida en el presente problema.

Engrape aquí
No doble

Temas selectos de análisis funcional y real (análisis armónico), posgrado.
Segundo examen parcial. Variante β.

Grupo $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, grupo $\mathbb{Z}$ y sus caracteres, series de Fourier, coeficientes de Fourier, series de Fourier absolutamente convergentes, convergencia de series de Fourier en L^2, convolución cíclica, convengencia puntual de series de Fourier, núcleos aproximativos, aproximación uniforme de funciones continuas por sus series de Fourier promediadas, aproximación de series de Fourier y de coeficientes de Fourier por medio de la transformada finita de Fourier.

Nombre:

El examen dura 110 minutos.

Problema 1. *20 %.*
Descripción de los caracteres del grupo $\mathbb{Z}$. Sea $A \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, $A = a+2\pi\mathbb{Z}$. Muestre que la función $\varphi_A(k) = e^{k\,i\,a}$ está bien definida y es un caracter del grupo $\mathbb{Z}$. Demuestre que cualquier caracter del grupo $\mathbb{Z}$ tiene esta forma.

Problema 2. *20 %.*
Teorema de convolución para series de Fourier absolutamente convergentes. Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Escriba la definición de la convolución $a * b$ y demuestre que $\widecheck{a * b} = \check{a}\,\check{b}$.

Problema 3. *20 %.*
Serie de Fourier de una función cuadrado integrable. Sea $f \in L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Demuestre que para cada n en $\mathbb{N}$ la suma parcial de Fourier $S_n f$ es el polinomio trigonométrico de grado $\leqslant n$ más cercano a f en el sentido del espacio $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, y calcule la L^2-norma de su diferencia $f - S_n f$. Demuestre que la sucesión $(S_n f)_{n=1}^{\infty}$ converge a la función f en la norma del espacio $L^2_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

Problema 4. *25 %.*
Aproximación uniforme por medio de la convolución periódica. Sea $(\Phi_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Dirac en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ o, más general, un núcleo aproximativo en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |(\Phi_n * f)(x) - f(x)| = 0.$$

Problema 5. *20 %.*
Aproximación de los coeficientes de Fourier por medio de la transformada finita de Fourier. Sea f una función continuamente derivable en $\mathbb{R}$ y 2π-periódica. Sean $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$. Pongamos

$$b_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{2jk\pi i}{n}}\; f\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Demuestre que

$$\left|\widehat{f}_j - b_j\right| \leqslant \frac{\pi}{n}\,\left(|j|\,\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right).$$

Problema 6. *25 %.*

Programación. En algún lenguaje de programación escriba una función `approx_fourier_coefs` de dos argumentos f y m (se supone que f es una función, m es un número entero positivo) que calcule y devuelva los números b_j del problema anterior, con $j \in \{-m+1, \ldots, 0, \ldots, m-1\}$, usando los valores de la función f en los puntos $2k\pi/n$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, donde $n = m^2$. Se supone que ya está definida una función `fft` que implementa la transformada rápida de Fourier. Se recomienda devolver el resultado como una matriz de dos columnas:

$$\begin{bmatrix} b_0 & b_0 \\ b_1 & b_{-1} \\ \vdots & \vdots \\ b_{m-1} & b_{-m+1} \end{bmatrix}.$$

Problema 7. *25 %.*

Ejemplo: los coeficientes de Fourier de una función lineal a trozos. Consideremos la función 2π-periódica f tal que $f(x) = |x|$ para cada x en $[-\pi, \pi]$. Deduzca una fórmula para los coeficientes de Fourier de f. En algún lenguaje de programación escriba una función `test_fourier_coefs_abs` de un argumento natural n que calcule los coeficientes de Fourier exactos $\widehat{f}_0, \ldots, \widehat{f}_{n-1}$ y sus aproximaciones con la función del problema anterior, y que devuelva el máximo valor absoluto de las diferencias correspondientes.