Análisis Matemático III, LFM.
Segundo examen parcial.
Variante α.

Derivación e integración, funciones de variación acotada, funciones absolutamente continuas, teoremas fundamentales de cálculo en el contexto de la integral de Lebesgue, integrales impropias de Lebesgue, integrales que dependen de parámetros, regla de Leibniz sobre la derivada de la integral respecto al parámetro, funciones Gamma y Beta.

Nombre:

El examen dura 80 minutos. De los 6 problemas se recomienda elegir los problemas que usted sabe resolver bien. Es obligatorio usar la notación propuesta en el problema. Una solución parcial puede valer mucho menos que una solución completa.

Problema 1. *25 %.*
El límite de una función creciente en el extremo derecho de su dominio. Sea $f\colon (2,6) \to \mathbb{R}$ una función creciente. Denotamos su imagen $f[X]$ por V. Demuestre que

$$\lim_{x\to 6^-} f(x) = \sup(V).$$

Considere dos casos: 1) $\sup(V) = +\infty$, 2) $\sup(V) \in \mathbb{R}$.

Problema 2. *25 %.*
La variación negativa de una función en un intervalo dividido en dos partes. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, y sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\mathrm{NVar}_a^b(f) = \mathrm{NVar}_a^c(f) + \mathrm{NVar}_c^b(f).$$

Problema 3. *25 %.*
La integral con el límite inferior variable define una función absolutamente continua. Sea $f \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{R})$. Definimos $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := \int_x^b f\,d\mu \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Demuestre que $g \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{R})$. No se permite pasar a las integrales con el límite *superior* variable.

Problema 4. *25 %.*
Convergencia de integrales impropias.

I. Demuestre que la siguiente integral impropia converge.

$$\int_1^{\to+\infty} \frac{(1+x)\operatorname{sen}(5x)\,dx}{x^{4/3}}.$$

II. Demuestre que

$$\int_1^{\to+\infty} \frac{(1+x)\,|\operatorname{sen}(5x)|\,dx}{x^{4/3}} = +\infty.$$

Problema 5. *30 %.*
El cálculo de una integral por medio de la regla de Leibniz. Usando la derivada respecto al parámetro, calcule la integral

$$G(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Sugerencias.

I. Justifique la aplicación de la regla de Leibniz.

II. Usando la regla de Leibniz y la integración por partes, demuestre que

$$G'(x) = -\frac{x}{2}\,G(x).$$

III. Calcule $G(0)$ y resuelva la ecuación diferencial del inciso II.

Problema 6. *20 %.*
Las funciones Beta y Gamma y sus aplicaciones.

I. Usando las funciones B, Γ y la fórmula de reflexión de Euler, calcule la integral

$$H(u) := \int_0^{+\infty} \frac{t^{u-1}}{1+t^2}\,dt \qquad (0 < u < 1).$$

II. Suponiendo que $0 < \xi < 1$, justifique la aplicación de la regla de Leibniz (la derivación respecto al parámetro) a la integral del inciso I, para u en $(\xi, 1)$.

III. Usando los resultados de los incisos I y II, calcule la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{u-1}\ln(t)}{1+t^2}\,dt \qquad (0 < u < 1).$$

Análisis Matemático III, LFM.
Segundo examen parcial.
Variante β.

Derivación e integración, funciones de variación acotada, funciones absolutamente continuas, teoremas fundamentales de cálculo en el contexto de la integral de Lebesgue, integrales impropias de Lebesgue, integrales que dependen de parámetros, regla de Leibniz sobre la derivada de la integral respecto al parámetro, funciones Gamma y Beta.

Nombre:

El examen dura 80 minutos. De los 6 problemas se recomienda elegir los problemas que usted sabe resolver bien. Es obligatorio usar la notación propuesta en el problema. Una solución parcial puede valer mucho menos que una solución completa.

Problema 1. *25 %.*
Los límites laterales de una función creciente. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Demuestre las siguientes afirmaciones.

I. Para cada x en (a, b), existen los límites laterales

$$f(x^-) := \lim_{y \to x^-} f(y), \qquad f(x^+) := \lim_{y \to x^+} f(y).$$

II. Para cada x en (a, b), se cumplen las desigualdades $f(x^-) \leqslant f(x) \leqslant f(x^+)$.

III. Para cada x, y en (a, b), si $x < y$, entonces $f(x^+) \leqslant f(y^-)$.

Problema 2. *25 %.*
Una cota superior para la integral de la parte negativa de la derivada. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Demuestre que

$$\int_a^b N(f'(x))\, dx \leqslant \mathrm{NVar}_a^b(f), \qquad \text{donde} \qquad N(t) := \begin{cases} 0, & t \geqslant 0; \\ -t, & t < 0. \end{cases}$$

Un camino de solución: considere $g(t) := \mathrm{NVar}_a^t(f)$ y demuestre que si las derivadas de f y g existen en un punto x, entonces $N(f'(x)) \leqslant g'(x)$.

Problema 3. *25 %.*
Una cota inferior para la integral de la parte negativa de la derivada de una función absolutamente continua. Sea $f \in \mathrm{AC}([a, b], \mathbb{R})$. Demuestre que

$$\int_a^b N(f'(x))\, dx \geqslant \mathrm{NVar}_a^b(f).$$

En realidad, se cumple una igualdad, pero en este problema es suficiente demostrar la desigualdad indicada.

Problema 4. *25 %.*
Convergencia de integrales impropias.

I. Demuestre que existen $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que

$$\forall x \in (0,1) \qquad C_1 x \leqslant \operatorname{sen}(x) \leqslant C_2 x.$$

II. Analice la convergencia de la siguiente integral impropia:

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\operatorname{sen}(x)\,dx}{x^{4/3}}.$$

III. Analice la convergencia de la siguiente integral impropia:

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\operatorname{sen}(x)\,dx}{x^{3}}.$$

Problema 5. *30 %.*
El cálculo de una integral por medio de la regla de Leibniz. Usando la derivada respecto al parámetro, calcule la integral

$$G(x) := \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{t\ e^{t}}\,dt \qquad (x \geqslant 0).$$

Sugerencias.

I. Demuestre que $1 - e^{-u} \leqslant u$ para cada $u \geqslant 0$.

II. Demuestre que G es continua en $[0, a)$ para cada $a > 0$.

III. Justifique la aplicación de la regla de Leibniz a la integral que define G. Se recomienda suponer que $a > 0$ y trabajar con x en $(0, a)$.

IV. Calcule $G'(x)$ y $G(0)$. Encuentre una fórmula simple para $G(x)$.

Problema 6. *20 %.*
Las funciones Beta y Gamma y sus aplicaciones. Calcule las siguientes integrales usando las funciones Beta y Gamma:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} x^8 \exp(-x^2)\,dx, \qquad I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^{10}(x)\operatorname{sen}^{10}(x)\,dx.$$