Supremo esencial de funciones positivas

Objetivos. Conocer el concepto de supremo esencial de una función positiva medible definida en un espacio de medida.

Requisitos. Funciones medibles, medida, supremo de un conjunto.

1. Definición (cota superior esencial de una función positiva medible definida en un espacio de medida). Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Se dice que b es una *cota superior esencial* de f si la desigualdad $f \le b$ se cumple μ-c.t.p., esto es, si

$$\mu\big(\{x \in X:\ \ f(x) > b\}\big) = 0.$$

2. Definición (supremo esencial de una función positiva medible definida en un espacio de medida). Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Entonces el *supremo esencial* de f se define como el ínfimo de las cotas superiores esenciales de f:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f \coloneqq \inf\Big\{b \in \overline{\mathbb{R}}_+ :\ \ \mu\big(\{x \in X:\ \ f(x) > b\}\big) = 0\Big\}.$$

3. Proposición (sobre el supremo esencial). Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Definimos

$$B \coloneqq \Big\{b \in \overline{\mathbb{R}}_+ :\ \ \mu\big(\{x \in X:\ \ f(x) > b\}\big) = 0\Big\}$$

y

$$c \coloneqq \inf(B).$$

Entonces:

1. Si $b_1 \in B$ y $b_2 > b_1$, entonces $b_2 \in B$.
2. Si $b > c$, entonces $b \in B$.
3. $c \in B$.
4. $B = [c, +\infty]$.

Como corolario,

$$f \le c \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

Idea de demostración. Para demostrar el inciso 3 notemos que

$$\{x \in X:\ \ f(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X:\ \ f(x) > c + 1/n\}. \qquad \square$$

4. Ejemplo. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida con $\mu(X) > 0$ y sea A un conjunto $\mathcal{F}$-medible tal que $\mu(A) = 0$. Definimos

$$f = 3\chi_{X \setminus A} + 5\chi_A.$$

Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 3.$$

5. Proposición. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0.$$

6. Observación. Notemos que si $\mu(X) = 0$, entonces para toda $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f = 0.$$

7. Propiedades aritméticas del supremo esencial. Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ y $\lambda > 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(f + g) &\le \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f + \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} g, \\
\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(\lambda f) &\le \lambda \operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f, \\
\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu}(fg) &\le \left(\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} f\right)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} g\right).
\end{aligned}$$