

Descripción de los espacios duales de $\ell^p(\mathbb{N})$ (un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko

<https://esfm.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

31 de mayo de 2022

1 Introducción

2 $(\ell^p)^* \cong \ell^q, 1 \leq p < +\infty$

3 $(c_0)^* \cong \ell^1$

Plan

- 1 Introducción
- 2 $(\ell^p)^* \cong \ell^q, 1 \leq p < +\infty$
- 3 $(c_0)^* \cong \ell^1$

Objetivos

- Dado un espacio normado V , repasar la definición del espacio dual V^* .
- Demostrar que para $1 \leq p < +\infty$, $(\ell^p)^* \cong \ell^q$.
- Demostrar que $(c_0)^* \cong \ell^1$.

Prerrequisitos

- Funcionales lineales acotados y sus normas.
- La definición del espacio dual de un espacio normado.
- El concepto de isomorfismo isométrico entre espacios normados.
- La desigualdad de Hölder.
- Los espacios ℓ^p , $1 \leq p \leq +\infty$.
- Los espacios c y c_0 .

Criterio de continuidad de un funcional lineal (repass)

Proposición

Sea V un espacios normado complejo y sea $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a) f es **acotado**: $\exists C \geq 0 \quad \forall x \in V \quad |f(x)| \leq C \|x\|_V$.
- (b) f es Lipschitz continuo.
- (c) f es uniformemente continuo.
- (d) f es continuo.
- (e) f es continuo en el punto 0_V .
- (f) $\sup \{|f(x)|: x \in V, \|x\|_V \leq 1\} < +\infty$.
- (g) $f[B_V]$ es un conjunto acotado en \mathbb{C} .

La norma de funcional lineal (repass)

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sea $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal.

$$N_1(f) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} |f(x)|, \quad N_2(f) := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V = 1}} |f(x)|, \quad N_3(f) := \sup_{\substack{x \in V \\ x \neq 0_V}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_V},$$

$$N_4(f) := \inf\{C \in [0, +\infty]: \forall x \in V \quad |f(x)| \leq C\|x\|_V\}.$$

Entonces $N_1(f) = N_2(f) = N_3(f) = N_4(f)$.

Más aún, el ínfimo en la definición de $N_4(f)$ se alcanza, esto es,

$$\forall x \in V \quad |f(x)| \leq N_4(f)\|x\|_V.$$

Funcionales lineales acotados (repass)

Sea V un espacio normado complejo.

Funcionales lineales acotados (repass)

Sea V un espacio normado complejo.

Un funcional lineal $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ se llama **acotado**, si existe $C \geq 0$ tal que

$$\forall x \in V \quad |f(x)| \leq C\|x\|_V.$$

Funcionales lineales acotados (repass)

Sea V un espacio normado complejo.

Un funcional lineal $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ se llama **acotado**, si existe $C \geq 0$ tal que

$$\forall x \in V \quad |f(x)| \leq C\|x\|_V.$$

La **norma de un funcional lineal acotado** f se define como

$$\|f\| := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} |f(x)|.$$

Otra notación: $\|f\|_{V \rightarrow \mathbb{C}}, \|f\|_{\mathbb{C} \leftarrow V}, \|f\|_{V^*}$.

Funcionales lineales acotados (repass)

Sea V un espacio normado complejo.

Un funcional lineal $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ se llama **acotado**, si existe $C \geq 0$ tal que

$$\forall x \in V \quad |f(x)| \leq C\|x\|_V.$$

La **norma de un funcional lineal acotado** f se define como

$$\|f\| := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} |f(x)|.$$

Otra notación: $\|f\|_{V \rightarrow \mathbb{C}}, \|f\|_{\mathbb{C} \leftarrow V}, \|f\|_{V^*}$.

Si f es acotado, entonces $\forall x \in V \quad |f(x)| \leq \|f\| \|x\|_V$.

Una receta para acotar $\|f\|$ por arriba

Sea V un espacio normado complejo.

Una receta para acotar $\|f\|$ por arriba

Sea V un espacio normado complejo.

Proposición

Sea $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal. Supongamos que $C \geq 0$ y

$$\forall x \in V \quad |f(x)| \leq C \|x\|_V.$$

Entonces $f \in V^*$ y $\|f\| \leq C$.

Una receta para acotar $\|f\|$ por abajo

Proposición

Sea $f \in V^*$. Supongamos que $y \in V \setminus \{0_V\}$. Pongamos

$$D = \frac{|f(y)|}{\|y\|_V}.$$

Entonces $\|f\| \geq D$.

El espacio dual de un espacio normado (repaso)

Sea V un espacio normado complejo.

$$V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

El espacio dual de un espacio normado (repaso)

Sea V un espacio normado complejo.

$$V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

Algunos autores prefieren la notación V' .

El espacio dual de un espacio normado (repass)

Sea V un espacio normado complejo.

$$V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

Algunos autores prefieren la notación V' .

Operaciones lineales en V^* :

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad (x \in V).$$

El espacio dual de un espacio normado (repass)

Sea V un espacio normado complejo.

$$V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

Algunos autores prefieren la notación V' .

Operaciones lineales en V^* :

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad (x \in V).$$

Proposición

Sea V un espacio normado real o complejo. Entonces V^* es de Banach.

Espacios normados isométricamente isomorfos

Sean V_1, V_2 espacios normados complejos.

Decimos que V_1 y V_2 son **isométricamente isomorfos** y escribimos $V_1 \cong V_2$, si existe un isomorfismo isométrico $T: V_1 \rightarrow V_2$.

Espacios normados isométricamente isomorfos

Sean V_1, V_2 espacios normados complejos.

Decimos que V_1 y V_2 son **isométricamente isomorfos** y escribimos $V_1 \cong V_2$, si existe un isomorfismo isométrico $T: V_1 \rightarrow V_2$.

Ejercicio. Sean V_1, V_2 espacios normados complejos isométricamente isomorfos.

Demostrar que V_1^* y V_2^* son isométricamente isomorfos.

Sugerencia. Si $T: V_1 \rightarrow V_2$ es un isomorfismo isométrico, definimos $U: V_2^* \rightarrow V_1^*$,

$$(Uf)(x) := f(T(x)).$$

Demostrar que U es un isomorfismo isométrico.

Un recordatorio sobre series: convergencia y convergencia absoluta

Sea $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Se dice que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **converge** y la suma de la serie es u , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n a_k - u \right| = 0.$$

Un recordatorio sobre series: convergencia y convergencia absoluta

Sea $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Se dice que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **converge** y la suma de la serie es u , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n a_k - u \right| = 0.$$

Sea $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tal que converge $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Un recordatorio sobre series: convergencia y convergencia absoluta

Sea $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Se dice que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **converge** y la suma de la serie es u , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n a_k - u \right| = 0.$$

Sea $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tal que converge $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Entonces también converge $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, y

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Un recordatorio sobre series: propiedades lineales

Sean $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \lambda \in \mathbb{C}$.

Un recordatorio sobre series: propiedades lineales

Sean $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Supongamos que convergen las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Un recordatorio sobre series: propiedades lineales

Sean $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Supongamos que convergen las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Entonces convergen las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k).$$

Un recordatorio sobre series: propiedades lineales

Sean $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Supongamos que convergen las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Entonces convergen las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k).$$

Más aún,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Plan

- 1 Introducción
- 2 $(\ell^p)^* \cong \ell^q, 1 \leq p < +\infty$
- 3 $(c_0)^* \cong \ell^1$

En esta sección suponemos que $1 < p < +\infty$.

Denotemos por q al exponente complementario de p :

$$q := \frac{p}{p-1}.$$

Entonces $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

En esta sección suponemos que $1 < p < +\infty$.

Denotemos por q al exponente complementario de p :

$$q := \frac{p}{p-1}.$$

Entonces $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Vamos a demostrar que $(\ell^p)^*$ es isométricamente isomorfo a ℓ^q .

Sean $x \in \ell^p$, $a \in \ell^q$. Entonces, por la desigualdad de Hölder,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| \leq \|a\|_q \|x\|_p.$$

Sean $x \in \ell^p$, $a \in \ell^q$. Entonces, por la desigualdad de Hölder,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| \leq \|a\|_q \|x\|_p.$$

Por consecuencia, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ converge en \mathbb{C} .

Sean $x \in \ell^p$, $a \in \ell^q$. Entonces, por la desigualdad de Hölder,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| \leq \|a\|_q \|x\|_p.$$

Por consecuencia, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ converge en \mathbb{C} .

Definición del funcional φ_a

Sea $a \in \ell^q$. Definimos $\varphi_a: \ell^p \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Sean $x \in \ell^p$, $a \in \ell^q$. Entonces, por la desigualdad de Hölder,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| \leq \|a\|_q \|x\|_p.$$

Por consecuencia, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ converge en \mathbb{C} .

Definición del funcional φ_a

Sea $a \in \ell^q$. Definimos $\varphi_a: \ell^p \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Por la desigualdad de Hölder, $\varphi_a \in (\ell^p)^*$ y $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_q$.

Ejercicio: verificar la linealidad de φ_a

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Ejercicio: verificar la linealidad de φ_a

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Ejercicio. Sean $a \in \ell^q$, $x, y \in \ell^p$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Demostrar que

$$\varphi_a(x + y) = \varphi_a(x) + \varphi_a(y), \quad \varphi_a(\lambda x) = \lambda \varphi_a(x).$$

El signo de un número complejo (repaso)

Para cada z en \mathbb{C} ,

$$\operatorname{sgn}(z) := \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & z \neq 0; \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

El signo de un número complejo (repaso)

Para cada z en \mathbb{C} ,

$$\operatorname{sgn}(z) := \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & z \neq 0; \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Si $r > 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\operatorname{sgn}(r e^{i\vartheta}) = e^{i\vartheta}.$$

El signo de un número complejo (repaso)

Para cada z en \mathbb{C} ,

$$\operatorname{sgn}(z) := \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & z \neq 0; \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Si $r > 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\operatorname{sgn}(r e^{i\vartheta}) = e^{i\vartheta}.$$

Para cada z en \mathbb{C} ,

$$\overline{z \operatorname{sgn}(z)} = |z|.$$

Fórmula para la norma de φ_a

Proposición

Sea $a \in \ell^q$. Entonces $\varphi_a \in (\ell^p)^*$ y $\|\varphi_a\| = \|a\|_q$.

Demostración de la desigualdad $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_q$

Para cada x en ℓ^p , por la desigualdad de Hölder,

$$|\varphi_a(x)|$$

Demostración de la desigualdad $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_q$

Para cada x en ℓ^p , por la desigualdad de Hölder,

$$|\varphi_a(x)| =$$

Demostración de la desigualdad $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_q$

Para cada x en ℓ^p , por la desigualdad de Hölder,

$$|\varphi_a(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right|$$

Demostración de la desigualdad $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_q$

Para cada x en ℓ^p , por la desigualdad de Hölder,

$$|\varphi_a(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right| \leq$$

Demostración de la desigualdad $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_q$

Para cada x en ℓ^p , por la desigualdad de Hölder,

$$|\varphi_a(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| |x_k|$$

Demostración de la desigualdad $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_q$

Para cada x en ℓ^p , por la desigualdad de Hölder,

$$|\varphi_a(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| |x_k| \leq$$

Demostración de la desigualdad $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_q$

Para cada x en ℓ^p , por la desigualdad de Hölder,

$$|\varphi_a(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| |x_k| \leq \|a\|_q \|x\|_p.$$

Demostración de la desigualdad $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_q$

Para cada x en ℓ^p , por la desigualdad de Hölder,

$$|\varphi_a(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| |x_k| \leq \|a\|_q \|x\|_p.$$

Por lo tanto, $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_q$.

Demostración de la desigualdad $\|\varphi_a\| \geq \|a\|_q$

Supongamos que $a \neq 0_{\mathbb{N}}$. Definimos $y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$y_k := \overline{\operatorname{sgn}(a_k)} |a_k|^{q-1}.$$

Demostración de la desigualdad $\|\varphi_a\| \geq \|a\|_q$

Supongamos que $a \neq 0_{\mathbb{N}}$. Definimos $y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$y_k := \overline{\operatorname{sgn}(a_k)} |a_k|^{q-1}.$$

Ejercicio: verificar que

$$\|y\|_p = \|a\|_q^{q-1}, \quad \varphi_a(y) = \|a\|_q^q.$$

Demostración de la desigualdad $\|\varphi_a\| \geq \|a\|_q$

Supongamos que $a \neq 0_{\mathbb{N}}$. Definimos $y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$y_k := \overline{\operatorname{sgn}(a_k)} |a_k|^{q-1}.$$

Ejercicio: verificar que

$$\|y\|_p = \|a\|_q^{q-1}, \quad \varphi_a(y) = \|a\|_q^q.$$

Concluir que

$$\|\varphi_a\| \geq \frac{|\varphi_a(y)|}{\|y\|_p} = \|a\|_q.$$

Linealidad respecto al parámetro a

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Linealidad respecto al parámetro a

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Ejercicio. Sean $a, b \in \ell^q$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostrar que para cada x en ℓ^p ,

$$\varphi_{a+b}(x) = \varphi_a(x) + \varphi_b(x), \quad \varphi_{\lambda a}(x) = \lambda \varphi_a(x).$$

Idea: ¿cómo recuperar a a partir de los valores de φ_a ?

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Idea: ¿cómo recuperar a a partir de los valores de φ_a ?

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

$$a_k = \varphi_a(\text{???}).$$

Idea: ¿cómo recuperar a a partir de los valores de φ_a ?

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

$$a_k = \varphi_a(\text{???}).$$

$$a_k = \varphi_a(e_k).$$

Los funcionales lineales acotados se recuperan por sus valores en una base de Schauder

Los funcionales lineales acotados se recuperan por sus valores en una base de Schauder

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea $f \in V^*$.

Sea $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una base de Schauder de V . Supongamos que $x \in V$,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b_k.$$

Demostrar que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(b_k).$$

Indicación: considerar $s_m := \sum_{k=1}^m \alpha_k b_k$.

Proposición

Sea $f \in (\ell^p)^*$. Definimos $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $a_j := f(e_j)$. Entonces $a \in \ell^q$ y $f = \varphi_a$.

Idea de demostración.

$$A_m := \sum_{k=1}^m |a_k|^q, \quad y_m := \sum_{j=1}^m \overline{\operatorname{sgn}(a_j)} |a_j|^{q-1} e_j.$$

Entonces $f(y_m) = A_m$, $\|y_m\|_p^p = A_m$,

$$A_m = f(y_m) = |f(y_m)| \leq \|f\| \|y_m\|_p \leq \|f\| A_m^{1/p}.$$

Esto implica que $A_m^{1/q} \leq \|f\|$ para cada m . Luego $a \in \ell^q$.

Definimos $\Phi: \ell^q \rightarrow (\ell^p)^*$,

$$\Phi(a) := \varphi_a,$$

esto es,

$$\Phi(a)(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Definimos $\Phi: \ell^q \rightarrow (\ell^p)^*$,

$$\Phi(a) := \varphi_a,$$

esto es,

$$\Phi(a)(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Proposición

Φ es un isomorfismo isométrico de espacios de Banach.

Definimos $\Phi: \ell^q \rightarrow (\ell^p)^*$,

$$\Phi(a) := \varphi_a,$$

esto es,

$$\Phi(a)(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Proposición

Φ es un isomorfismo isométrico de espacios de Banach.

Hemos demostrado que la definición de Φ es consistente,

Definimos $\Phi: \ell^q \rightarrow (\ell^p)^*$,

$$\Phi(a) := \varphi_a,$$

esto es,

$$\Phi(a)(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Proposición

Φ es un isomorfismo isométrico de espacios de Banach.

Hemos demostrado que la definición de Φ es consistente,
que la función Φ es isométrica,

Definimos $\Phi: \ell^q \rightarrow (\ell^p)^*$,

$$\Phi(a) := \varphi_a,$$

esto es,

$$\Phi(a)(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Proposición

Φ es un isomorfismo isométrico de espacios de Banach.

Hemos demostrado que la definición de Φ es consistente,

que la función Φ es isométrica,

que $\Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b)$, $\Phi(\lambda a) = \lambda\Phi(a)$,

Definimos $\Phi: \ell^q \rightarrow (\ell^p)^*$,

$$\Phi(a) := \varphi_a,$$

esto es,

$$\Phi(a)(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Proposición

Φ es un isomorfismo isométrico de espacios de Banach.

Hemos demostrado que la definición de Φ es consistente,
que la función Φ es isométrica,
que $\Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b)$, $\Phi(\lambda a) = \lambda\Phi(a)$,
y que Φ es suprayectiva.

Ejercicio. Demostrar que $(\ell^1)^*$ es isométricamente isomorfo a ℓ^∞ .

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

En particular, hay que demostrar lo siguiente:

- Si $a \in \ell^\infty$, entonces $\|\varphi_a\| = \|a\|_\infty$.
- Si $f \in (\ell^1)^*$ y $a = (f(e_j))_{j \in \mathbb{N}}$, entonces $\|a\|_\infty = \|f\|$.

Plan

- 1 Introducción
- 2 $(\ell^p)^* \cong \ell^q, 1 \leq p < +\infty$
- 3 $(c_0)^* \cong \ell^1$

Proposición

Sea $a \in \ell^1$. Definimos $\varphi_a: c_0 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Entonces $\varphi_a \in (c_0)^*$ y $\|\varphi_a\| = \|a\|_1$.

Proposición

Sea $a \in \ell^1$. Definimos $\varphi_a: c_0 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Entonces $\varphi_a \in (c_0)^*$ y $\|\varphi_a\| = \|a\|_1$.

Sugerencia para demostrar que $\|\varphi_a\| \geq \|a\|_1$.

$$y_m := \sum_{j=1}^m \overline{\operatorname{sgn}(a_j)} e_j = (\overline{\operatorname{sgn}(a_1)}, \dots, \overline{\operatorname{sgn}(a_m)}, 0, 0, \dots).$$

Calcular $|\varphi_a(y_m)|$. Suponiendo $a \neq 0_{\mathbb{N}}$, calcular $\|y_m\|_{\infty}$ para m grande.

Proposición

Sea $f \in (c_0)^*$. Pongamos $a := (f(e_j))_{j \in \mathbb{N}}$. Entonces

$$a \in \ell^1(\mathbb{N}), \quad f = \varphi_a.$$

Proposición

Sea $f \in (c_0)^*$. Pongamos $a := (f(e_j))_{j \in \mathbb{N}}$. Entonces

$$a \in \ell^1(\mathbb{N}), \quad f = \varphi_a.$$

Sugerencia.

$$A_m := \sum_{k=1}^m |a_k|, \quad y_m := \sum_{j=1}^m \overline{\operatorname{sgn}(a_j)} e_j = (\overline{\operatorname{sgn}(a_1)}, \dots, \overline{\operatorname{sgn}(a_m)}, 0, 0, \dots).$$

$$A_m = f(y_m) = |f(y_m)| \leq \|f\| \|y_m\|_\infty \leq \|f\|.$$

Definimos $\Phi: \ell^1 \rightarrow (c_0)^*$,

$$\Phi(a) := \varphi_a, \quad \text{esto es,} \quad \Phi(a)(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Proposición

Φ es un isomorfismo isométrico.

Ejercicio. Completar todos los detalles de demostración.

El espacio c_0 no es reflexivo

Hemos mostrado (tomando en cuenta los ejercicios) que

$$(c_0)^* \cong \ell^1,$$

pero

$$(\ell^1)^* \cong \ell^\infty.$$

El espacio bidual $(c_0)^{**}$ no es isométricamente isomorfo a c_0 .

Ejemplo de funcional lineal acotado que no alcanza su norma en la esfera unitaria

Ejercicio. Definimos $f: c_0 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}.$$

1. Encontrar $a \in \ell^1$ tal que $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ para cada x en c_0 .
2. Demostrar que $\|f\| = 1$.
3. Mostrar que si $x \in c_0 \setminus \{0_{\mathbb{N}}\}$, entonces existe k en \mathbb{N} tal que $|x_k| < \|x\|_{\infty}$.
4. Demostrar que si $x \in c_0 \setminus \{0_{\mathbb{N}}\}$, entonces $|f(x)| < \|x\|_{\infty}$.
5. Por los incisos anteriores, $\sup_{\substack{x \in c_0 \\ \|x\|=1}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_{\infty}} = 1$, pero el supremo no se alcanza.

El dual del espacio de sucesiones convergentes

Recordamos que

$$c := \left\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \quad \exists L \in \mathbb{C} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = L \right\}.$$

El espacio c se considera con la norma inducida de ℓ^∞ .

El dual del espacio de sucesiones convergentes

Recordamos que

$$c := \left\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \quad \exists L \in \mathbb{C} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = L \right\}.$$

El espacio c se considera con la norma inducida de ℓ^∞ .

Ejercicio. Demostrar que $c^* \cong \ell^1$.

$$\Phi(a)(x) := a_1 \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} x_k.$$

Sobre el dual de ℓ^∞

Para cada a en ℓ^1 , podemos definir $\varphi_a \in (\ell^\infty)^*$,

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Sobre el dual de ℓ^∞

Para cada a en ℓ^1 , podemos definir $\varphi_a \in (\ell^\infty)^*$,

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Usando el teorema de Hahn–Banach, es posible demostrar que no todos los elementos de $(\ell^\infty)^*$ son de esta forma.

Sobre el dual de ℓ^∞

Para cada a en ℓ^1 , podemos definir $\varphi_a \in (\ell^\infty)^*$,

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Usando el teorema de Hahn–Banach, es posible demostrar que no todos los elementos de $(\ell^\infty)^*$ son de esta forma.

Más aún, es posible demostrar que $(\ell^\infty)^*$ no es isométricamente isomorfo a ℓ^1 .