Teorema de convergencia dominada de Lebesgue

Objetivos. Demostrar el teorema de convergencia dominada.

Requisitos. Integral de Lebesgue de funciones complejas, lema de Fatou, límite inferior y límite superior de una sucesión.

1. Observación. Ya sabemos que la convergencia puntual $f_n \to g$ no garantiza que $\int f_n \to \int g$ (¡recuerde algún contraejemplo!). El siguiente teorema dice que bajo cierta condición adicional la convergencia puntual implica la convergencia de integrales. A saber, el teorema pide que las funciones f_n sean *dominadas* por alguna función *integrable*.

2. Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea una $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que:

(i) f_n converge puntualmente a una función $g\colon X \to \mathbb{C}$.

(ii) Existe una función $h \in L^1(X, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+)$ tal que $|f_n(x)| \le h(x)$ para todo $x \in X$.

Entonces $f_n \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $g \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - g| \, d\mu = 0 \tag{1}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X g \, d\mu. \tag{2}$$

Repaso de las herramientas que usaremos para la demostración

3. Lema de Fatou (repaso). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Entonces

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

4. Dos propiedades elementales del límite inferior (repaso).

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y sea $b \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n, \qquad \liminf_{n\to\infty}(b + a_n) = b + \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

5. Relación entre el valor absoluto de una integral y la integral del valor absoluto (repaso). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$. Entonces

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \le \int_X |f| \, d\mu.$$

Demostración del teorema de la convergencia dominada

Demostración. Idea principal: aplicar el Lema de Fatou a la sucesión $2h - |f_n - g|$.

1. Por la segunda suposición del teorema, para cada punto x en X y cada índice n en $\mathbb{N}$ es válida la desigualdad $|f_n(x)| \leq h(x)$. Pasando al límite cuando $n \to \infty$, obtenemos la desigualdad $|g(x)| \leq h(x)$. Luego

$$|f_n - g| \leq |f_n| + |g| \leq 2h.$$

En particular, de estas desigualdades se sigue que $f_n, g, |f_n - g| \in L^1(X, \mu, \mathbb{C})$.

2. La sucesión de funciones $2h - |f_n - g|$ es positiva. Apliquemos el lema de Fatou a esta sucesión, luego utilicemos propiedades del límite inferior:

$$\begin{aligned}\int_X 2h\, d\mu = \int_X \left(\liminf_{n\to\infty} (2h - |f_n - g|)\right) d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (2h - |f_n - g|)\ d\mu \\ &= \int_X 2h\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - g|\, d\mu.\end{aligned}$$

Notemos que la integral $\int_X 2h\, d\mu$ es finita. La restamos de ambos lados de la desigualdad:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - g|\, d\mu \leq 0.$$

Como la sucesión de estas integrales es no negativa, su límite inferior es ≥ 0. Por lo tanto, $\limsup = \liminf = 0$, y obtenemos (1):

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - g|\, d\mu = 0.$$

3. Sabemos que el valor absoluto de la integral de una función integrable es menor o igual a la integral del valor absoluto de la función. Aplicamos este resultado a la función $f_n - g$:

$$\left| \int_X (f_n - g)\, d\mu \right| \leq \int_X |f_n - g|\, d\mu,$$

o sea

$$\left| \int_X f_n\, d\mu - \int_X g\, d\mu \right| \leq \int_X |f_n - g|\, d\mu.$$

La sucesión de integrales en el lado derecho tiende a 0. Por lo tanto, la sucesión en el lado izquierdo también tiende a 0. Pero esto significa que se cumple (2). $\square$

Ejemplos

Sugerencia: para resolver los siguientes ejercicios calcule la función ψ,

$$\psi(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

6. Sea $X = \mathbb{R}$, sea μ la medida de Lebesgue y sean $f_n \coloneqq \chi_{[n,n+1)}$. Explique por qué no se puede aplicar el teorema de convergencia dominada.

7. Sea $X = (0,1]$, sea μ la medida de Lebesgue en $(0,1]$ y sean $f_n \coloneqq n\chi_{(0,1/n]}$. Explique por qué no se puede aplicar el teorema de convergencia dominada.

Corolarios y análogos

8. Teorema de la convergencia uniformemente acotada. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones puntualmente convergente a una función $g\colon X \to \mathbb{C}$ y sea $C > 0$ tal que $|f_n(x)| \le C$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $f_n \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, d\mu = \int\limits_X g \, d\mu.$$

9. Teorema de la convergencia uniforme. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones uniformemente convergente a una función integrable $g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, esto es,

$$f_n \xrightarrow[]{X} g \qquad \wedge \qquad \int\limits_X |g| \, d\mu < +\infty.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, d\mu = \int\limits_X g \, d\mu.$$

10. Ejercicio. Muestre con un ejemplo que la condición "$\mu(X) < +\infty$" en el teorema anterior no se puede omitir.

11. Ejercicio. Deduzca el Teorema de Convergencia Decreciente del Teorema de Convergencia Dominada.

12. Ejercicio (un análogo del TCD). Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables tal que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$ y $\int_X |f_n| \, d\mu \to \int |g| \, d\mu$. Demuestre que $\int_X |f_n - g| \, d\mu \to 0$. Sugerencia: revise la demostración del TCD y aplique el lema de Fatou a otra sucesión de funciones.