Diferencias divididas

Objetivos. Conocer el concepto de las diferencias divididas. Partiendo de la definición recursiva, representar la diferencia dividida como una combinación lineal de los valores de la función, concluir que las diferencias divididas son simétricas respecto a sus argumentos.

Requisitos. Experencia en trabajar con definiciones recursivas y demostraciones por inducción. Permutaciones y funciones simétricas.

Aplicaciones. Criterios de la monotonía y de la convexidad, aproximación de las derivadas en métodos numéricos, interpolación de polinomios.

En este tema suponemos que el dominio de la función es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y el codominio es $\mathbb{C}$, aunque el dominio puede ser subconjunto de cualquier campo y el codominio puede ser subconjunto de un espacio vectorial sobre el este campo.

Diferencias divididas del primer orden

1 Definición (diferencias divididas del primer orden de una función)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{C}$. Para cualesquiera x_1, x_2 en A con $x_1 \neq x_2$,

$$\Delta_f(x_1, x_2) \coloneqq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{1}$$

Otra notación: $f[x_1, x_2]$.

2 Ejercicio. Mostrar que $\Delta_f(x_1, x_2)$ se escribe como la siguiente combinación lineal de $f(x_1)$ y $f(x_2)$, con coeficientes dependientes solamente de x_1 y x_2:

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{1}{x_2 - x_1} f(x_2). \tag{2}$$

3 Ejercicio. Mostrar que $\Delta_f(x_2, x_1) = \Delta_f(x_1, x_2)$.

- Primer método: usar la Definición 1.
- Segundo método: usar la fórmula (2).

4 Ejercicio. Para cada una de las siguientes funciones transformar $\Delta_f(x_1, x_2)$ en otra forma, para eliminar o esconder el denominador $x_2 - x_1$.

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x^n$.
- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq \operatorname{sen}(x)$. Usar la función *seno cardinal*, $\operatorname{senc}(x) \coloneqq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$.
- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq \cos(x)$. Usar la función senc.

Diferencias divididas del segundo orden

5 Definición (diferencias divididas del segundo orden de una función)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{C}$. Para cualesquiera puntos x_1, x_2, x_3 en A, diferentes a pares,

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \coloneqq \frac{\Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}.$$

Otra notación: $f[x_1, x_2, x_3]$.

6 Ejercicio. Mostrar que $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ se puede escribir como una combinación lineal de $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$, con coeficientes dependientes solamente de x_1, x_2, x_3.

7 Ejercicio. Usando el resultado del Ejercicio 6, demostrar que la expresión $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ es simétrica respecto a sus argumentos x_1, x_2, x_3. En otras palabras, demostrar que las siguientes 6 expresiones son iguales:

$$\begin{array}{lll} \Delta_f(x_1, x_2, x_3), & \Delta_f(x_1, x_3, x_2), & \Delta_f(x_2, x_1, x_3), \\ \Delta_f(x_2, x_3, x_1), & \Delta_f(x_3, x_1, x_2), & \Delta_f(x_3, x_2, x_1). \end{array}$$

8 Ejercicio. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x^4$. Representar $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ como un polinomio de x_1, x_2, x_3.

Diferencias divididas de orden n

9 Definición (diferencias divididas de orden n de una función, definición recursiva)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{C}$. Para cualquier punto x_1 en A,

$$\Delta_f(x_1) \coloneqq f(x_1).$$

Para cualquier n en $\mathbb{N}$ y cualesquiera $x_1, \ldots, x_{n+1}$ en A, diferentes a pares,

$$\Delta_f(x_1, \ldots, x_{n+1}) \coloneqq \frac{\Delta_f(x_2, \ldots, x_{n+1}) - \Delta_f(x_1, \ldots, x_n)}{x_{n+1} - x_1}. \tag{3}$$

10 Ejercicio (diferencias divididas se escriben como combinaciones lineales de los valores de la función)**.** Demostrar que para cada n en $\mathbb{N}$ y cualesquiera y cualesquiera $x_1, \ldots, x_{n+1}$ en A, diferentes a pares,

$$\Delta_f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}} (x_j - x_k)}. \tag{4}$$

11 Definición (permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, repaso)**.** Una *permutación* del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ es una biyección $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. El conjunto de las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ se denota por S_n.

12 Ejercicio (función simétrica de n argumentos, repaso)**.** Sean X, Z conjuntos, $n \in \mathbb{N}$, $Y \subseteq X^n$, $g\colon Y \to Z$. Se dice que g es *simétrica* si para cualquier n-tupla $(x_1, \ldots, x_n)$ en Y y cualquier permutación σ en S_n, se tiene que

$$(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \in Y$$

y

$$g(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = g(x_1, \ldots, x_n).$$

13 Ejercicio. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Pongamos

$$Y \coloneqq \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in A^n\colon \quad \forall j, k \in \{1, \ldots, n\} \qquad (j \neq k) \quad \Rightarrow \quad (x_j \neq x_k)\big\}.$$

Definimos $g\colon Y \to \mathbb{C}$ mediante la regla $g(x_1, \ldots, x_n) \coloneqq \Delta_f(x_1, \ldots, x_n)$. Demostrar que la función g es simétrica. Sugerencias:

- usar la fórmula (4);
- hacer un cambio de variable en la suma;
- hacer un cambio de variable en el producto.