La función de distribución asociada a una medida de probabilidad sobre el eje real (tarea adicional)

Objetivos. Estudiar propiedades elementales de la función de distribución asociada a una medida.

Requisitos. Medidas y sus propiedades básicas; la medida de la unión de una sucesión creciente de conjuntos; la σ-álgebra de Borel; límites laterales.

Denotemos por $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ a la σ-álgebra de Borel generada por la topología usual de $\mathbb{R}$.

1 Definición. Sea $\mu\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,1]$ una medida de probabilidad, es decir, una función σ-aditiva tal que $\mu(\varnothing) = 0$ y $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Definimos $F_\mu\colon \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F_\mu(x) \coloneqq \mu((-\infty, x]).$$

Se propone demostrar las siguientes propiedades de F_μ. Si quieren, pueden considerar los últimos dos ejemplos antes de demostrar las propiedades generales.

2 Proposición. *F_μ es creciente: si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces*

$$F_\mu(a) \le F_\mu(b).$$

3 Lema. $\lim\limits_{m\to\infty} F_\mu(m) = 1.$

4 Proposición. $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\mu(x) = 1.$

Idea de demostración. Trabajar con la definición del límite y usar el lema anterior. □

5 Lema. $\lim\limits_{m\to\infty} F_\mu(-m) = 0.$

6 Proposición. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\mu(x) = 0.$

Idea de demostración. Trabajar con la definición del límite y usar el lema anterior. □

7 Lema. *Para cada a en $\mathbb{R}$,*

$$\lim_{m\to\infty} F_\mu\left(a + \frac{1}{m}\right) = F_\mu(a).$$

8 Proposición. *Para cada a en $\mathbb{R}$, la función F_μ es continua por la derecha en el punto a:*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} F_\mu(x) = F_\mu(a).$$

También se puede usar la notación $\lim\limits_{x\to a^+} F_\mu(x)$.

9 Proposición. *Sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} F_\mu(x) = \sup_{x<a} F_\mu(x).$$

Idea de demostración. Usar el hecho que F_μ es creciente. $\square$

10 Ejemplo. Sean $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tales que $a_1 < a_2 < a_3$ y sean $p_1, p_2, p_3 > 0$ tales que

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Definimos $\mu\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mu(A) := \sum_{\substack{k \in \{1,2,3\} \\ a_k \in A}} p_k.$$

Calcular F_μ. Para

$$a_1 = -5, \quad a_2 = -3, \quad a_3 = 4, \quad p_1 = \frac{3}{10}, \quad p_2 = \frac{1}{2}, \quad p_3 = \frac{1}{5},$$

dibujar la gráfica de F_μ.

11 Ejemplo. Sea $u\colon [0,\pi] \to [0,1]$,

$$u(x) := \sin(x).$$

Definimos $\mu\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0,1]$,

$$\mu(A) := \frac{1}{\pi}\, \mu_1\big(\{x \in [0,\pi]\colon\ u(x) \in A\}\big),$$

donde μ_1 es la medida de Lebesgue (en particular, si Y es un intervalo, entonces $\mu_1(Y)$ es la longitud del intervalo Y). Calcular F_μ. Hacer una gráfica.