La distancia inducida por una norma

Repasemos la definición del espacio normado. Vamos a denotar la norma por $\|\cdot\|$.

1 Definición (repaso: norma, espacio normado)**.** Sea V un espacio vectorial complejo y sea $\|\cdot\|\colon V \to [0,+\infty)$ una función. Se dice que $\|\cdot\|$ es una *norma* en V, si se cumplen las siguientes propiedades (los axiomas de norma).

N1. La propiedad subaditiva: para cualesquiera a, b en V,

$$\|a+b\| \le \|a\| + \|b\|.$$

N2. La propiedad homogénea absoluta: para cualesquiera a en V y λ en $\mathbb{C}$,

$$\|\lambda a\| = |\lambda|\,\|a\|.$$

N3. Para cada a en $V \setminus \{0_V\}$ se tiene que $\|a\| > 0$.

En esta situación el par ordenado $(V, \|\cdot\|)$ se llama *espacio complejo normado.*

Ya hemos demostrado las siguientes dos propiedades de norma.

2 Proposición (repaso: la norma del vector cero es cero)**.** *Sea V un espacio normado complejo. Entonces*

$$\|0_V\| = 0.$$

3 Proposición (repaso: la norma del vector opuesto)**.** *Sea V un espacio normado complejo y sea $a \in V$. Entonces*

$$\|-a\| = \|a\|.$$

4 Proposición (la distancia inducida por una norma)**.** *Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo. Definimos $d\colon V^2 \to [0,+\infty)$,*

$$d(a,b) \coloneqq \|a-b\|.$$

Entonces d es una distancia.

Demostración. Demostremos la desigualdad del triángulo usando N1:

$$d(a,b) = \|a-b\| = \|(a-c)+(c-b)\| \leq \|a-c\| + \|c-b\| = d(a,c) + d(c,b).$$

Demostremos la propiedad simétrica de d usando N2 y la Proposición 3:

$$d(b,a) = \|b-a\| = \|(-1)(a-b)\| = \|a-b\| = d(a,b).$$

La Proposición 2 implica que $d(a,a) = 0$:

$$d(a,a) = \|a-a\| = \|0_V\| = 0.$$

Usando N3 demostremos que d separa los puntos. Sean $a, b \in V$ tales que $a \neq b$. Entonces $a - b \neq 0_V$ y

$$d(a,b) = N(a-b) > 0.$$ □

5 Observación (la norma se puede recuperar en términos de la distancia inducida)**.** Notemos que si d es la distancia inducida por la norma $\|\cdot\|$, entonces para cada a en V se tiene que

$$\|a\| = \|a - 0_V\| = d(a, 0_V).$$

6 Observación. Cualquier espacio normado se puede considerar como un espacio métrico, con la distancia inducida por la norma. Por lo tanto, en el espacio normado se definen todos los conceptos definidos para espacios métricos: bolas abiertas y cerradas, sucesiones de Cauchy, completez, funciones uniformemente continuas, etc. La métrica inducida por la norma, a su vez, induce una topología, así que para un espacio normado se definen todos los conceptos de espacios topológicos.

7 Proposición (propiedades especiales de la distancia inducida por una norma)**.** *Sea* $(V, \|\cdot\|)$ *un espacio normado complejo. Denotamos por* d *a la distancia inducida por* $\|\cdot\|$.

1. *Para cualesquiera* a, b, c *en* V,

$$d(a+c, b+c) = d(a,b).$$

2. *Para cualesquiera* a, b *en* V *y* λ *en* $\mathbb{C}$,

$$d(\lambda a, \lambda b) = |\lambda|\, d(a,b).$$

Demostración. Se sigue fácilmente de la definición de la norma. □

8 Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea $d\colon V^2 \to [0, +\infty)$ una distancia que tiene las siguientes dos propiedades adicionales:

$$\forall a, b, c \in V \qquad d(a + c, b + c) = d(a, b),$$

$$\forall a, b \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad d(\lambda a, \lambda b) = |\lambda|\, d(a, b).$$

Demostrar que en V existe una única norma que induce la distancia d.

9 Definición (espacio de Banach)**.** Un espacio de Banach (real o complejo) es un espacio normado (real o complejo) completo.

10 Proposición (subespacio de un espacio normado)**.** *Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo y sea W un subespacio vectorial de V. Denotamos por $\|\cdot\|_W$ la norma de V restringida a W. Entonces $(W, \|\cdot\|_W)$ es un espacio normado complejo.*

Demostración. Las condiciones N1, N2, N3 de la definición de la norma se escriben con los cuantificadores $\forall$. Estas condiciones no contienen el cuantificador $\exists$. Las igualdades de estas condiciones se cumplen para cualesquiera elementos del espacio V, por lo tanto, se cumplen para cualesquiera elementos del subespacio W. $\square$

11 Ejercicio. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado complejo y sea W un subespacio vectorial de V. Denotamos por $\|\cdot\|_W$ la norma de V restringida a W. Denotemos por d_V la distancia inducida por la norma de V. Demostrar que la norma $\|\cdot\|_W$ induce la distancia $d_V|_{W\times W}$.