La distancia entre un punto y un conjunto en un espacio métrico (un tema de la unidad “Espacios métricos”)

Egor Maximenko,

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

22 de septiembre de 2022

Plan

Objetivo: estudiar propiedades básicas de la función

$$D_A(x) := \inf_{a \in A} d(a, x),$$

donde A es un subconjunto del espacio métrico X.

Prerrequisitos

- Espacio métrico.
- El ínfimo de un subconjunto de $\mathbb{R}$.
- El ínfimo de una función.

La distancia entre un punto y un conjunto en un espacio métrico

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

La distancia entre un punto y un conjunto en un espacio métrico

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Definición

Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$. Definimos $D_A \colon X \to [0, +\infty]$,

$$D_A(x) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

¿Cuándo $D_A(x) = +\infty$?

$$D_A(x) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

¿Cuándo $D_A(x) = +\infty$?

$$D_A(x) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Si $A = \emptyset$, entonces $D_A(x) = +\infty$ para cada x en X.

¿Cuándo $D_A(x) = +\infty$?

$$D_A(x) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Si $A = \emptyset$, entonces $D_A(x) = +\infty$ para cada x en X.

Si $A \neq \emptyset$, entonces $D_A(x) < +\infty$ para cada x en X.

La función D_A es Lipschitz continua con coeficiente 1

Proposición

Sea $A \subseteq X$ tal que $A \neq \emptyset$. Entonces cada x, y en X,

$$|D_A(x) - D_A(y)| \leq d(x, y).$$

Demostración, inicio

Sean $x, y \in X$.

Demostración, inicio

Sean $x, y \in X$.

Para cada a en A, por la desigualdad del triángulo,

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Demostración, inicio

Sean $x, y \in X$.

Para cada a en A, por la desigualdad del triángulo,

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Como $d(x, a) \geq D_A(x)$, obtenemos que

$$D_A(x) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Demostración, inicio

Sean $x, y \in X$.

Para cada a en A, por la desigualdad del triángulo,

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Como $d(x, a) \geq D_A(x)$, obtenemos que

$$D_A(x) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Pasamos el sumando $d(x, y)$ al lado izquierdo con el signo negativo:

$$D_A(x) - d(x, y) \leq d(y, a).$$

Demostración, final

$$D_A(x) - d(x, y) \leq d(y, a).$$

Demostración, final

$$D_A(x) - d(x, y) \leq d(y, a).$$

Como a es un elemento arbitrario de A, hemos mostrado que

$$D_A(x) - d(x, y) \quad \text{es una cota inferior de} \quad \{d(y, a) \colon\ a \in A\}.$$

Demostración, final

$$D_A(x) - d(x,y) \leq d(y,a).$$

Como a es un elemento arbitrario de A, hemos mostrado que

$$D_A(x) - d(x,y) \quad \text{es una cota inferior de} \quad \{d(y,a)\colon\ a \in A\}.$$

Por lo tanto,

$$D_A(x) - d(x,y) \leq D_A(y),$$

esto es, $D_A(x) - D_A(y) \leq d(x,y)$.

Demostración, final

$$D_A(x) - d(x, y) \leq d(y, a).$$

Como a es un elemento arbitrario de A, hemos mostrado que

$$D_A(x) - d(x, y) \quad \text{es una cota inferior de} \quad \{d(y, a) \colon \ a \in A\}.$$

Por lo tanto,

$$D_A(x) - d(x, y) \leq D_A(y),$$

esto es, $D_A(x) - D_A(y) \leq d(x, y)$.

La desigualdad $D_A(y) - D_A(x) \leq d(x, y)$ se demuestra de manera similar.

Una regla para trabajar con desigualdades de la forma $D_A(x) < \eta$

Ejercicio. Sean $A \subseteq X$, $x \in X$, $\eta > 0$. Demostrar que

$$D_A(x) < \eta \qquad \iff \qquad \exists a \in A \qquad d(x, a) < \eta.$$

Una regla para trabajar con desigualdades de la forma $D_A(x) < \eta$

Ejercicio. Sean $A \subseteq X$, $x \in X$, $\eta > 0$. Demostrar que

$$D_A(x) < \eta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a \in A \qquad d(x,a) < \eta.$$

Sugerencia: trabajar con la definición del ínfimo.

Descripción de la cerradura de A en términos de D_A

Ejercicio. Sean $A \subseteq X$, $x \in X$. Demostrar que

$$D_A(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \mathrm{cl}(A).$$

Descripción de la cerradura de A en términos de D_A

Ejercicio. Sean $A \subseteq X$, $x \in X$. Demostrar que

$$D_A(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \mathrm{cl}(A).$$

Sugerencia: usar el resultado del ejercicio anterior
y el criterio de puntos de adherencia en términos de bolas.

Separación de conjuntos cerrados

Ya sabemos que cada espacio métrico es de Hausdorff.

Separación de conjuntos cerrados

Ya sabemos que cada espacio métrico es de Hausdorff.

Ahora se propone demostrar la propiedad normal.

Separación de conjuntos cerrados

Ya sabemos que cada espacio métrico es de Hausdorff.

Ahora se propone demostrar la propiedad normal.

Ejercicio. Sean P, Q subconjuntos cerrados de X tales que $P \cap Q = \emptyset$.

Construir $f \in C(X, [0, 1])$ tal que $f(x) = 0$ para cada x en P y $f(x) = 1$ para cada x en Q.

Separación de conjuntos cerrados

Ya sabemos que cada espacio métrico es de Hausdorff.

Ahora se propone demostrar la propiedad normal.

Ejercicio. Sean P, Q subconjuntos cerrados de X tales que $P \cap Q = \emptyset$.

Construir $f \in C(X, [0, 1])$ tal que $f(x) = 0$ para cada x en P y $f(x) = 1$ para cada x en Q.

Sugerencias. Primero considerar los casos triviales, cuando $P = \emptyset$ o $Q = \emptyset$.

Separación de conjuntos cerrados

Ya sabemos que cada espacio métrico es de Hausdorff.

Ahora se propone demostrar la propiedad normal.

Ejercicio. Sean P, Q subconjuntos cerrados de X tales que $P \cap Q = \emptyset$.
Construir $f \in C(X, [0,1])$ tal que $f(x) = 0$ para cada x en P y $f(x) = 1$ para cada x en Q.

Sugerencias. Primero considerar los casos triviales, cuando $P = \emptyset$ o $Q = \emptyset$.

Si $P \neq \emptyset$ y $Q \neq \emptyset$, usar las funciones D_P y D_Q.