La distancia de un punto a un conjunto

Objetivos. Definir el concepto de la distancia de un punto a un subconjunto de un espacio métrico.

Requisitos. Desigualdad del triángulo, el ínfimo de un conjunto.

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

1 Definición (la distancia de un punto a un conjunto)**.** Sean $x \in X$, $A \subseteq X$. Definimos $d'(x, A)$ se define mediante la siguiente regla:

$$d'(x, A) \coloneqq \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Otra forma de la misma definición:

$$d'(x, A) \coloneqq \inf\bigl\{r \geq 0 \colon \quad \exists a \in A \quad r = d(x, a)\bigr\}.$$

2 Observación. $d'(x, A) = +\infty$ si, y solo si, $A = \varnothing$.

3 Observación. Es común escribir simplemente $d(x, A)$ en vez de $d'(x, A)$. En este tema usamos otra notación, d', para emfatizar que estamos considerando un objeto nuevo. La función $d \colon X^2 \to [0, +\infty)$ no se puede evaluar en el par (x, A).

4 Observación. El nombre "distancia" para la expresión $d'(x, A)$ es confuso. La función d' no es una distancia porque su dominio no es de la forma $Y \times Y$.

5 Observación. Dados $A, B \subseteq X$, se puede definir $d''(A, B)$ mediante la regla

$$d''(A, B) \coloneqq \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b).$$

Notemos que d'' puede tomar el valor $+\infty$ y no satisface la desigualdad del triángulo, por eso no es una distancia en 2^X. Sin embargo, a veces esta función se conoce como "la distancia mínima" o "la distancia ínfima" entre dos conjuntos.

6 Proposición. *Sean $A \subseteq X$, $x \in X$. Entonces $d'(x, A) = 0$ si, y solo si, $x \in \operatorname{cl}(A)$.*

Demostración. $\Rightarrow$. Supongamos que $d'(x, A) = 0$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, por la definición del ínfimo, existe a en A tal que $d(x, a) < \varepsilon$. Esto implica que $x \in \operatorname{cl}(A)$.

$\Leftarrow$. Supongamos que $x \in \operatorname{cl}(A)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe a en A tal que $d(x, a) < \varepsilon$. Por la definición del ínfimo, esto implica que $d'(x, A) = 0$. □

7 Proposición (un análogo de la desigualdad del triángulo para la distancia de un punto a un conjunto)**.** *Sean $x, y \in X$, $Z \subseteq X$. Entonces*

$$d'(x, Z) \leq d(x, y) + d'(y, Z).$$

Demostración. Para cualqueir z en Z se cumple la siguiente desigualdad triangular:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

El sumando $d(x,z)$ es mayor o igual que $d'(x,Z)$, porque $d'(x,Z)$ es una cota inferior del conjunto $\{d(x,z) \colon\; z \in Z\}$. Aplicamos la ley transitiva:

$$d'(x,Z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Pasamos $d(x,y)$ al lado izquierdo:

$$d'(x,Z) - d(x,y) \leq d(y,z).$$

La última desigualdad significa que $d'(x,Z) - d(x,y)$ es una cota inferior del conjunto $\{d(y,z) \colon\; z \in Z\}$. Ahora por la definición del inf obtenemos que

$$d'(x,Z) - d(x,y) \leq d'(y,Z).$$

Pasando $d(x,y)$ al lado derecho obtenemos el resultado requerido. $\square$

8 Proposición (la continuidad de Lipschitz para la distancia del punto variable a un conjunto fijo)**.** *Sea* $A \subseteq X$*,* $A \neq \varnothing$*. Definimos* $f \colon X \to [0,+\infty)$ *mediante la regla*

$$f(x) \coloneqq d'(x,A).$$

Entonces para cualesquiera x, y *en* X *se cumple*

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y). \tag{1}$$

Demostración. Por la Proposición 7,

$$f(x) \leq d(x,y) + f(y), \qquad f(y) \leq d(x,y) + f(x).$$

Obtenemos la siguiente desigualdad doble:

$$-d(x,y) \leq f(x) - f(y) \leq d(x,y).$$

Esta desigualdad doble es equivalente a la desigualdad (1). $\square$