La distancia de un punto a un conjunto

Objetivos. Definir el concepto de la distancia de un punto a un subconjunto de un espacio métrico.

Requisitos. Desigualdad del triángulo, el ínfimo de un conjunto.

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

1 Definición (la distancia de un punto a un conjunto)**.** Sea $A \subseteq X$. Definimos $D_A \colon X \to [0, +\infty]$ mediante la siguiente regla:

$$D_A(x) \coloneqq \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Otra forma de la misma definición:

$$D_A(x) \coloneqq \inf\bigl\{r \geq 0\colon \quad \exists a \in A \quad r = d(x, a)\bigr\}.$$

2 Observación. $D_A(x) = +\infty$ si, y solo si, $A = \varnothing$.

3 Observación. Es común escribir simplemente $d(x, A)$ en vez de $D_A(x)$. En este tema usamos otra notación para enfatizar que estamos considerando un objeto nuevo. Formalmente, la función $d\colon X^2 \to [0, +\infty)$ no se puede evaluar en el par (x, A), por eso es deseable usar otra notación.

4 Observación. El nombre “distancia” para la expresión $D_A(x)$ es confuso. Esta función no es una distancia porque su dominio no es de la forma $X \times X$.

5 Observación. Dados $A, B \subseteq X$, se puede definir $D(A, B)$ mediante la regla

$$D(A, B) \coloneqq \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b).$$

Notemos que D puede tomar el valor $+\infty$ y no satisface la desigualdad del triángulo, por eso no es una distancia en 2^X. Sin embargo, a veces esta función se conoce como “la distancia mínima” o “la distancia ínfima” entre dos conjuntos.

6 Proposición. *Sean $A \subseteq X$, $x \in X$. Entonces $D_A(x) = 0$ si, y solo si, $x \in \mathrm{cl}(A)$.*

Demostración. $\Rightarrow$. Supongamos que $D_A(x) = 0$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, por la definición del ínfimo, existe a en A tal que $d(x, a) < \varepsilon$. Esto implica que $x \in \mathrm{cl}(A)$.

$\Leftarrow$. Supongamos que $x \in \mathrm{cl}(A)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe a en A tal que $d(x, a) < \varepsilon$. Por la definición del ínfimo, esto implica que $D_A(x) = 0$. □

7 Proposición (un análogo de la desigualdad del triángulo para la distancia de un punto a un conjunto)**.** *Sean $x, y \in X$, $A \subseteq X$. Entonces*

$$D_A(x) \leq d(x, y) + d_A(y).$$

Demostración. Para cualqueir a en A, se cumple la siguiente desigualdad triangular:

$$d(x,a) \le d(x,y) + d(y,a).$$

El sumando $d(x,a)$ es mayor o igual que $D_A(x)$, porque $D_A(x)$ es una cota inferior del conjunto $\{d(x,a)\colon\ a \in A\}$. Aplicamos la ley transitiva:

$$D_A(x) \le d(x,y) + d(y,a).$$

Pasamos $d(x,y)$ al lado izquierdo:

$$D_A(x) - d(x,y) \le d(y,a).$$

La última desigualdad significa que $D_A(x) - d(x,y)$ es una cota inferior del conjunto $\{d(y,a)\colon\ a \in A\}$. Ahora por la definición del inf obtenemos que

$$D_A(x) - d(x,y) \le D_A(y).$$

Pasando $d(x,y)$ al lado derecho obtenemos el resultado requerido. □

8 Proposición (la continuidad de Lipschitz para la distancia del punto variable a un conjunto fijo)**.** *Sean $A \subseteq X$, $A \neq \varnothing$. Entonces, la función D_A es Lipschitz-continua con coeficiente* 1*, es decir, cualesquiera x, y en X se cumple*

$$|D_A(x) - D_A(y)| \le d(x,y). \tag{1}$$

Demostración. Por la Proposición 7,

$$D_A(x) \le d(x,y) + D_A(y), \qquad D_A(y) \le d(x,y) + D_A(x).$$

Obtenemos la siguiente desigualdad doble:

$$-d(x,y) \le D_A(x) - D_A(y) \le d(x,y).$$

Esta desigualdad doble es equivalente a la desigualdad (1). □