

Densidad de funciones simples en L^p

Objetivos. Demostrar que las funciones simples p -integrables forman un subconjunto denso en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$, donde $1 \leq p < +\infty$.

Requisitos. Definición de los espacios \mathcal{L}^p y L^p , aproximación de funciones medibles positivas por funciones simples, funciones simples medibles que se anulan fuera de un conjunto de medida finita, desigualdad de Márkov–Chebyshev.

1 Definición (repaso: funciones simples medibles que se anulan fuera de un conjunto de medida finita). Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida. Denotamos por $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ al conjunto de las funciones simples y medibles respecto a \mathcal{F} . Denotemos por \mathcal{S}_μ al siguiente conjunto de funciones:

$$\mathcal{S}(X, \mu) := \left\{ f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : \mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) < +\infty \right\}.$$

Es fácil ver que $\mathcal{S}(X, \mu)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

2 Definición. Sea $\tilde{\mathcal{S}}(X, \mu)$ el conjunto de las clases de equivalencia de funciones que pertenecen a $\mathcal{S}(X, \mu)$:

$$\tilde{\mathcal{S}}(X, \mu) := \{f + \mathcal{Z}(X, \mu) : f \in \mathcal{S}(X, \mu)\}.$$

3 Proposición. Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$. Entonces

$$\mathcal{S}(X, \mu) = \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}^p(X, \mu).$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Supongamos que v_1, \dots, v_m son los valores no nulos de f , y pongamos $v_0 := 0$. Para cada k en $\{0, 1, \dots, m\}$, pongamos

$$A_k := f^{-1}[\{v_k\}], \quad \text{esto es,} \quad A_k = \{x \in X : f(x) = v_k\}.$$

Entonces los conjuntos A_0, A_1, \dots, A_m son \mathcal{F} -medibles. Además, son disjuntos a pares y cubren X . En otras palabras, (A_0, A_1, \dots, A_m) es una partición generalizada de X . Notemos que el conjunto A_0 puede ser vacío. Como vimos en la teoría de funciones simples medibles,

$$f = \sum_{k=0}^m v_k A_k.$$

Es una representación generalizada de la función simple f . Pongamos

$$Y := \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Entonces $Y = \bigcup_{k=1}^m A_k$.

Demostremos que $\mathcal{S}(X, \mu) \subseteq \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}^p(X, \mu)$. Supongamos que $f \in \mathcal{S}(X, \mu)$. Entonces $\mu(A_k) < +\infty$ para cada k en $\{1, \dots, m\}$. Luego

$$\int_X |f|^p d\mu = \sum_{k=1}^m |v_k|^p \mu(A_k) < +\infty.$$

Demostremos que $\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}^p(X, \mu) \subseteq \mathcal{S}(X, \mu)$. Supongamos que $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$. Para cada k en $k \in \{1, \dots, m\}$, aplicamos la desigualdad de Márkov–Chebyshev:

$$\mu(A_k) \leq \mu(\{x \in X : |f(x)|^p \leq |v_k|^p\}) \leq \frac{1}{|v_k|^p} \int_X |f|^p d\mu < +\infty.$$

Finalmente, concluimos que $\mu(Y) \leq \sum_{n=1}^k \mu(A_k) < +\infty$. □

4 Teorema (densidad de funciones simples en L^p). *Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$. Entonces $\mathcal{S}(X, \mu)$ es denso en $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ y $\tilde{\mathcal{S}}(X, \mu)$ es denso en $L^p(X, \mu)$.*

Demostración. 1. Sea $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ tal que $f \geq 0$. Construimos una sucesión $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tal que los valores de s_n son múltiplos de 2^{-n} , $s_n \leq f$ y $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f puntualmente. Como $s_n \leq f$, obtenemos que $s_n \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ y por lo tanto $s_n \in \mathcal{S}(X, \mu)$. Por el teorema de la convergencia dominada, $N_p(s_n - f) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Pasando a las clases de equivalencia, concluimos que $s_n + \mathcal{Z}(X, \mu) \in \tilde{\mathcal{S}}(X, \mu)$ y $s_n + \mathcal{Z} \rightarrow f + \mathcal{Z}$ en $L^p(X, \mu)$.

2. En general, cualquier función de la clase $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ se escribe como una combinación lineal de cuatro funciones no negativas. Aplicamos el resultado del inciso 1 a cada una de estas cuatro funciones.

3. Mostremos que $\tilde{\mathcal{S}}(X, \mu)$ es denso en $L^p(X, \mu)$. Sea $F \in L^p(X, \mu)$ y sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $f \in \mathcal{S}(X, \mu)$ tal que $N_p(g - f) < \varepsilon$. Pongamos $G := g + \mathcal{Z}(X, \mu)$. Entonces $G \in \tilde{\mathcal{S}}(X, \mu)$ y $\|G - F\|_p = N_p(g - f) < \varepsilon$. □

5 Observación. Como $L^p(X, \mu)$ es completo y $\tilde{\mathcal{S}}(X, \mu)$ es denso en $L^p(X, \mu)$, el espacio $L^p(X, \mu)$ se puede ver como una completación del espacio vectorial $\tilde{\mathcal{S}}(X, \mu)$ dotado de la restricción de la norma $\|\cdot\|_p$. Esta visión del espacio $L^p(X, \mu)$ puede ser útil en algunas aplicaciones, porque la descripción explícita de los elementos de $L^p(X, \mu)$ no es muy simple. Por otro lado, en muchas situaciones es cómodo ver que $L^p(X, \mu)$ contiene a las funciones continuas de soporte compacto, a las funciones continuas a trozos (con ciertas restricciones), etc.