Definición de la integral de Lebesgue para las funciones simples medibles positivas (un tema del curso "Análisis real")

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

28 de mayo de 2021

Objetivos:

- $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ para f simples medibles positivas,
- expresar esta integral en términos de una representación generalizada de f,
- definir $\int_A f \,\mathrm{d}\mu$ para $A \in \mathcal{F}$.

Prerrequisitos:

- funciones simples, sus representaciones canónicas y generalizadas;
- funciones medibles;
- criterio de medibilidad de funciones simples;
- subespacio $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$ de un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Plan

Plan

Funciones medibles (repaso)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Sea $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, o $Y = \mathbb{C}$.
Denotamos por $\mathcal{B}_Y$ la σ-álgebra de Borel de Y.

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) := \{f \in Y^X : \quad \forall B \in \mathcal{B}_Y \quad f^{-1}[B] \in \mathcal{F}\}.$$

Para $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, los rayos $(v, +\infty)$ generan $\mathcal{B}_Y$, por eso

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) \quad &\iff \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad f^{-1}[(v, +\infty)] \in \mathcal{F} \\ &\iff \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad \{x \in X : \ f(x) > v\} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Representación canónica de funciones simples (repaso)

Una función $f\colon X \to Y$ se llama simple, si el conjunto $f[X]$ es finito.

Proposición

Sea $f\colon X \to Y$ simple.

Representación canónica de funciones simples (repaso)

Una función $f\colon X \to Y$ se llama simple, si el conjunto $f[X]$ es finito.

Proposición

Sea $f\colon X \to Y$ simple.

Supongamos que $f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}$, donde $v_1, \ldots, v_m$ son diferentes a pares.

Representación canónica de funciones simples (repaso)

Una función $f\colon X \to Y$ se llama simple, si el conjunto $f[X]$ es finito.

Proposición

Sea $f\colon X \to Y$ simple.

Supongamos que $f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}$, donde $v_1, \ldots, v_m$ son diferentes a pares.

Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$ definimos $P_j :=$

Representación canónica de funciones simples (repaso)

Una función $f\colon X \to Y$ se llama simple, si el conjunto $f[X]$ es finito.

Proposición

Sea $f\colon X \to Y$ simple.

Supongamos que $f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}$, donde $v_1, \ldots, v_m$ son diferentes a pares.

Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$ definimos $\quad P_j := f^{-1}[\{v_j\}]$.

Representación canónica de funciones simples (repaso)

Una función $f\colon X \to Y$ se llama simple, si el conjunto $f[X]$ es finito.

Proposición

Sea $f\colon X \to Y$ simple.

Supongamos que $f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}$, donde $v_1, \ldots, v_m$ son diferentes a pares.

Para cada j en $\{1, \ldots, m\}$ definimos $P_j := f^{-1}[\{v_j\}]$.

Entonces $(P_1, \ldots, P_m)$ es una partición de X y

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Representación canónica de funciones simples (repaso)

Proposición

Sean $v_1, \ldots, v_m \in Y$ diferentes a pares y sea $(P_1, \ldots, P_m)$ una partición de X. Definimos

$$f := \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Entonces f es simple, y para cada j en $\{1, \ldots, m\}$

$$P_j = f^{-1}[\{v_j\}].$$

La representación canónica de una función simple es única, salvo el orden de sumandos.

Funciones simples medibles (repaso)

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $f\colon X \to Y$ una función simple con la siguiente representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Funciones simples medibles (repaso)

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $f\colon X \to Y$ una función simple con la siguiente representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Entonces

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) \qquad \Longleftrightarrow$$

Funciones simples medibles (repaso)

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $f\colon X \to Y$ una función simple con la siguiente representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Entonces

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) \qquad \iff \qquad P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{F}.$$

Funciones simples medibles (repaso)

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $f\colon X \to Y$ una función simple con la siguiente representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Entonces

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad P_1, \ldots, P_m \in \mathcal{F}.$$

$$\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, Y) \;\coloneqq\; \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)\colon\; f[X] \text{ es finito}\}.$$

Funciones indicadoras medibles (repaso)

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sea $A \subseteq X$. Entonces

$$\mathbb{1}_A \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \in \mathcal{F}.$$

$$\mathcal{J}(X, \mathcal{F}) \; := \; \{\mathbb{1}_A : \; A \in \mathcal{F}\}.$$

Combinaciones lineales de funciones indicadoras medibles

Proposición

$$\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, Y) = \ell_Y(\mathcal{J}(X, \mathcal{F})),$$

donde $\ell_Y(C) :=$ las combinaciones lineales de C con coeficientes en Y.

Combinaciones lineales de funciones indicadoras medibles

Proposición

$$\mathcal{SM}(X,\mathcal{F},Y) = \ell_Y(\mathcal{J}(X,\mathcal{F})),$$

donde $\ell_Y(C) :=$ las combinaciones lineales de C con coeficientes en Y.

$\subseteq$. Si $f \in \mathcal{SM}(X,\mathcal{F},Y)$, entonces f tiene representación canónica

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbb{1}_{P_j},$$

Combinaciones lineales de funciones indicadoras medibles

Proposición

$$\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, Y) = \ell_Y(\mathcal{J}(X, \mathcal{F})),$$

donde $\ell_Y(C) :=$ las combinaciones lineales de C con coeficientes en Y.

$\subseteq$. Si $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, Y)$, entonces f tiene representación canónica

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbb{1}_{P_j}, \qquad P_j =$$

Combinaciones lineales de funciones indicadoras medibles

Proposición

$$\mathcal{SM}(X,\mathcal{F},Y) = \ell_Y(\mathcal{J}(X,\mathcal{F})),$$

donde $\ell_Y(C) :=$ las combinaciones lineales de C con coeficientes en Y.

$\subseteq$. Si $f \in \mathcal{SM}(X,\mathcal{F},Y)$, entonces f tiene representación canónica

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbb{1}_{P_j}, \qquad P_j = f^{-1}[\{v_j\}] \in \mathcal{F}.$$

Combinaciones lineales de funciones indicadoras medibles

Proposición

$$\mathcal{SM}(X,\mathcal{F},Y) = \ell_Y(\mathcal{J}(X,\mathcal{F})),$$

donde $\ell_Y(C) :=$ las combinaciones lineales de C con coeficientes en Y.

$\subseteq$. Si $f \in \mathcal{SM}(X,\mathcal{F},Y)$, entonces f tiene representación canónica

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbb{1}_{P_j}, \qquad P_j = f^{-1}[\{v_j\}] \in \mathcal{F}.$$

$\supseteq$. $\mathcal{J}(X,\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{SM}(X,\mathcal{F},Y)$,
$\mathcal{SM}(X,\mathcal{F},Y)$ es cerrado bajo la adición y bajo la multiplicación por λ, $\lambda \in Y$.

Representaciones generalizadas de funciones simples (repaso)

Proposición

Sean $w_1, \ldots, w_n \in Y$ y sea $(Q_1, \ldots, Q_n)$ una partición generalizada de X.

$$f := \sum_{k=1}^{n} w_k \, \mathbb{1}_{Q_k}.$$

Representaciones generalizadas de funciones simples (repaso)

Proposición

Sean $w_1, \ldots, w_n \in Y$ y sea $(Q_1, \ldots, Q_n)$ una partición generalizada de X.

$$f := \sum_{k=1}^{n} w_k \, \mathbb{1}_{Q_k}.$$

Entonces f es simple.

Si $f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}$ con $v_1, \ldots, v_m$ diferentes a pares y $P_j = f^{-1}[\{v_j\}]$, entonces

$$P_j =$$

Representaciones generalizadas de funciones simples (repaso)

Proposición

Sean $w_1, \ldots, w_n \in Y$ y sea $(Q_1, \ldots, Q_n)$ una partición generalizada de X.

$$f := \sum_{k=1}^{n} w_k \, \mathbb{1}_{Q_k}.$$

Entonces f es simple.

Si $f[X] = \{v_1, \ldots, v_m\}$ con $v_1, \ldots, v_m$ diferentes a pares y $P_j = f^{-1}[\{v_j\}]$, entonces

$$P_j = \bigcup_{\substack{1 \le k \le n \\ w_k = v_j}} Q_k.$$

Plan

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f \, \mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f \,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f \,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
- $\displaystyle\int_X^{(3)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ con $\displaystyle\int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$,

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
- $\displaystyle\int_X^{(3)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ con $\displaystyle\int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$,
- $\displaystyle\int_X^{(4)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ con $\displaystyle\int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$.

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f\,\mathrm{d}\mu \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)),$
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f\,\mathrm{d}\mu \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty]),$
- $\displaystyle\int_X^{(3)} f\,\mathrm{d}\mu \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R}) \quad \text{con} \int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty,$
- $\displaystyle\int_X^{(4)} f\,\mathrm{d}\mu \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \quad \text{con} \int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty.$

En esta clase definiremos $\displaystyle\int_X^{(1)} f\,\mathrm{d}\mu \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)).$

Definición de la integral para las funciones simples medibles positivas

Definición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$. Supongamos que f tiene la sig. representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j}.$$

Definición de la integral para las funciones simples medibles positivas

Definición

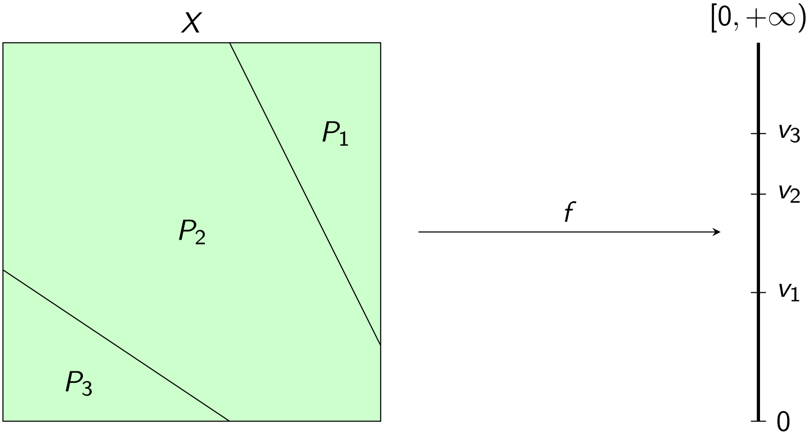
Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$. Supongamos que f tiene la sig. representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j}.$$

Definimos

$$\boxed{\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).}$$

También denotamos esta integral por $\displaystyle\int_X^{(1)} f \, \mathrm{d}\mu$.



$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = v_1\,\mu(P_1) + v_2\,\mu(P_2) + v_3\,\mu(P_3).$$

Observaciones sobre la definición

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Si $X = \varnothing$, entonces

Observaciones sobre la definición

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \,\mu(P_j).$$

Si $X = \varnothing$, entonces $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$.

Observaciones sobre la definición

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \,\mu(P_j).$$

Si $X = \varnothing$, entonces $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) < +\infty$, entonces el sumando correspondiente es $v_j \,\mu(P_j) =$

Observaciones sobre la definición

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Si $X = \varnothing$, entonces $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) < +\infty$, entonces el sumando correspondiente es $v_j \, \mu(P_j) = 0$.

Observaciones sobre la definición

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Si $X = \varnothing$, entonces $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) < +\infty$, entonces el sumando correspondiente es $v_j \, \mu(P_j) = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) = +\infty$, entonces $v_j \, \mu(P_j) =$

Observaciones sobre la definición

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \,\mu(P_j).$$

Si $X = \varnothing$, entonces $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) < +\infty$, entonces el sumando correspondiente es $v_j \,\mu(P_j) = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) = +\infty$, entonces $v_j \,\mu(P_j) = 0$.

Observaciones sobre la definición

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Si $X = \varnothing$, entonces $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) < +\infty$, entonces el sumando correspondiente es $v_j \, \mu(P_j) = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) = +\infty$, entonces $v_j \, \mu(P_j) = 0$.

Si $v_j > 0$ y $\mu(P_j) = +\infty$, entonces $v_j \, \mu(P_j) =$

Observaciones sobre la definición

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \,\mu(P_j).$$

Si $X = \varnothing$, entonces $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) < +\infty$, entonces el sumando correspondiente es $v_j \,\mu(P_j) = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) = +\infty$, entonces $v_j \,\mu(P_j) = 0$.

Si $v_j > 0$ y $\mu(P_j) = +\infty$, entonces $v_j \,\mu(P_j) = +\infty$.

Integral de una función simple medible positiva dada por una representación generalizada

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,

$$f = \sum_{k=1}^{n} w_k \, \mathbb{1}_{Q_k},$$

donde $w_1, \ldots, w_n \in [0, +\infty)$, $(Q_1, \ldots, Q_n)$ un partición generalizada de X.

Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} w_k \, \mu(Q_k).$$

Demostración, inicio

Sean $v_1, \ldots, v_m$ los elementos de $f[X]$ y sean $P_1, \ldots, P_m$ sus preimágenes:

$$P_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Entonces f tiene la siguiente representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Luego, por la definición,

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \varnothing$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \ldots, n\}$.

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \varnothing$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \ldots, n\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq m\colon\ Q_k \neq \varnothing\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{1 \leq k \leq m\colon\ Q_k \neq \varnothing,\ w_k = v_k\}.$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \varnothing$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \ldots, n\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq m\colon\ \ Q_k \neq \varnothing\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{1 \leq k \leq m\colon\ \ Q_k \neq \varnothing,\ \ w_k = v_k\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \varnothing$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \ldots, n\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq m\colon\ \ Q_k \neq \varnothing\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{1 \leq k \leq m\colon\ \ Q_k \neq \varnothing,\ \ w_k = v_k\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\sum_{k=1}^{m} w_k \mu(Q_k) =$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \varnothing$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \ldots, n\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq m\colon\ \ Q_k \neq \varnothing\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{1 \leq k \leq m\colon\ \ Q_k \neq \varnothing,\ \ w_k = v_k\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\sum_{k=1}^{m} w_k \mu(Q_k) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ Q_k \neq \varnothing}} w_k \mu(Q_k)$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \varnothing$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \ldots, n\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq m \colon\ Q_k \neq \varnothing\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{1 \leq k \leq m \colon\ Q_k \neq \varnothing,\ w_k = v_k\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\sum_{k=1}^{m} w_k \mu(Q_k) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ Q_k \neq \varnothing}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ w_k = v_j}} w_k \mu(Q_k)$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \varnothing$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \ldots, n\}$. Luego

$$\{1 \le k \le m\colon\ Q_k \neq \varnothing\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{1 \le k \le m\colon\ Q_k \neq \varnothing,\ w_k = v_k\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\sum_{k=1}^{m} w_k \mu(Q_k) = \sum_{\substack{1 \le k \le m \\ Q_k \neq \varnothing}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{1 \le k \le m \\ w_k = v_j}} w_k \mu(Q_k)$$

$$=$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \varnothing$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \ldots, n\}$. Luego

$$\{1 \le k \le m\colon\ \ Q_k \neq \varnothing\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{1 \le k \le m\colon\ \ Q_k \neq \varnothing,\ \ w_k = v_k\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\sum_{k=1}^{m} w_k \mu(Q_k) = \sum_{\substack{1 \le k \le m \\ Q_k \neq \varnothing}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{1 \le k \le m \\ w_k = v_j}} w_k \mu(Q_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{\substack{1 \le k \le m \\ w_k = v_j}} \mu(Q_k)$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \varnothing$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \ldots, n\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq m\colon\ \ Q_k \neq \varnothing\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{1 \leq k \leq m\colon\ \ Q_k \neq \varnothing,\ \ w_k = v_k\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} w_k \mu(Q_k) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ Q_k \neq \varnothing}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ w_k = v_j}} w_k \mu(Q_k) \\ &= \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ w_k = v_j}} \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^{m} v_j \mu(P_j)\end{aligned}$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \varnothing$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \ldots, n\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq m\colon \ \ Q_k \neq \varnothing\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{1 \leq k \leq m\colon \ \ Q_k \neq \varnothing, \ \ w_k = v_k\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} w_k \mu(Q_k) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ Q_k \neq \varnothing}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ w_k = v_j}} w_k \mu(Q_k) \\ &= \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ w_k = v_j}} \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^{m} v_j \mu(P_j) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Ejemplo: la integral de la función indicadora

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$.

Ejemplo: la integral de la función indicadora

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_X \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu =$$

Ejemplo: la integral de la función indicadora

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_X \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A).$$

Ejemplo: la integral de la función indicadora

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_X \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A).$$

En efecto, $\mathbb{1}_A$ tiene la siguiente representación generalizada:

$$\mathbb{1}_A =$$

Ejemplo: la integral de la función indicadora

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_X \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A).$$

En efecto, $\mathbb{1}_A$ tiene la siguiente representación generalizada:

$$\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_A$$

Ejemplo: la integral de la función indicadora

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_X \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A).$$

En efecto, $\mathbb{1}_A$ tiene la siguiente representación generalizada:

$$\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{X \setminus A}.$$

Ejemplo: la integral de la función indicadora

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_X \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A).$$

En efecto, $\mathbb{1}_A$ tiene la siguiente representación generalizada:

$$\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{X \setminus A}.$$

Por eso

$$\int_X \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu =$$

Ejemplo: la integral de la función indicadora

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_X \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A).$$

En efecto, $\mathbb{1}_A$ tiene la siguiente representación generalizada:

$$\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{X \setminus A}.$$

Por eso

$$\int_X \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu = 1 \cdot \mu(A) + 0 \cdot \mu(X \setminus A)$$

Ejemplo: la integral de la función indicadora

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_X \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A).$$

En efecto, $\mathbb{1}_A$ tiene la siguiente representación generalizada:

$$\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{X \setminus A}.$$

Por eso

$$\int_X \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu = 1 \cdot \mu(A) + 0 \cdot \mu(X \setminus A) = \mu(A).$$

Ejemplo: una suma finita como una integral

Sea $a = [a_k]_{k=1}^{n} \in [0, +\infty)^n$.

Ejemplo: una suma finita como una integral

Sea $a = [a_k]_{k=1}^n \in [0, +\infty)^n$.

Consideramos $X = \{1, \ldots, n\}$ con la σ-álgebra 2^X y con la medida de conteo ν.

Ejemplo: una suma finita como una integral

Sea $a = [a_k]_{k=1}^n \in [0, +\infty)^n$.

Consideramos $X = \{1, \ldots, n\}$ con la σ-álgebra 2^X y con la medida de conteo ν.

Entonces $a \in \mathcal{SM}(X, 2^X, [0, +\infty))$.
La función simple a tiene la siguiente representación generalizada:

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{\{k\}}.$$

Ejemplo: una suma finita como una integral

Sea $a = [a_k]_{k=1}^n \in [0, +\infty)^n$.

Consideramos $X = \{1, \ldots, n\}$ con la σ-álgebra 2^X y con la medida de conteo ν.

Entonces $a \in \mathcal{SM}(X, 2^X, [0, +\infty))$.

La función simple a tiene la siguiente representación generalizada:

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{\{k\}}.$$

Luego

$$\int_{\{1,\ldots,n\}} a \, \mathrm{d}\nu = \sum_{k=1}^{n} a_k \nu(\{k\}) = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Plan

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$.

Pongamos

$$\mathcal{F}_A := \{B \in \mathcal{F}: \quad B \subseteq A\}, \qquad \mu_A := \mu|_{\mathcal{F}_A}.$$

Entonces $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$ es un espacio de medida.

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$.

Pongamos

$$\mathcal{F}_A := \{B \in \mathcal{F}: \quad B \subseteq A\}, \qquad \mu_A := \mu|_{\mathcal{F}_A}.$$

Entonces $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$ es un espacio de medida.

En otras palabras, $\mathcal{F}_A := 2^A \cap \mathcal{F}$.

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$.

Pongamos

$$\mathcal{F}_A := \{B \in \mathcal{F}: \quad B \subseteq A\}, \qquad \mu_A := \mu|_{\mathcal{F}_A}.$$

Entonces $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$ es un espacio de medida.

En otras palabras, $\mathcal{F}_A := 2^A \cap \mathcal{F}$.

Demostración: ejercicio.

La restricción de una función medible es medible

Proposición

Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{H})$ espacios medibles sea $A \in \mathcal{F}$.

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{H})$. Entonces $f|_A \in \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_A, Y, \mathcal{H})$.

La restricción de una función medible es medible

Proposición

Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{H})$ espacios medibles sea $A \in \mathcal{F}$.

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{H})$. Entonces $f|_A \in \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_A, Y, \mathcal{H})$.

Demostración. Si $B \in \mathcal{H}$, entonces

$$f|_A^{-1}[B] =$$

La restricción de una función medible es medible

Proposición

Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{H})$ espacios medibles sea $A \in \mathcal{F}$.

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{H})$. Entonces $f|_A \in \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_A, Y, \mathcal{H})$.

Demostración. Si $B \in \mathcal{H}$, entonces

$$f|_A^{-1}[B] = \{x \in A\colon\ f|_A(x) \in B\} =$$

La restricción de una función medible es medible

Proposición

Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{H})$ espacios medibles sea $A \in \mathcal{F}$.

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{H})$. Entonces $f|_A \in \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_A, Y, \mathcal{H})$.

Demostración. Si $B \in \mathcal{H}$, entonces

$$f|_A^{-1}[B] = \{x \in A\colon\ f|_A(x) \in B\} = \{x \in A\colon\ f(x) \in B\} =$$

La restricción de una función medible es medible

Proposición

Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{H})$ espacios medibles sea $A \in \mathcal{F}$.
Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{H})$. Entonces $f|_A \in \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_A, Y, \mathcal{H})$.

Demostración. Si $B \in \mathcal{H}$, entonces

$$f|_A^{-1}[B] = \{x \in A\colon\ f|_A(x) \in B\} = \{x \in A\colon\ f(x) \in B\} = A \cap f^{-1}[B]$$

La restricción de una función medible es medible

Proposición

Sean $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{H})$ espacios medibles sea $A \in \mathcal{F}$.
Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{H})$. Entonces $f|_A \in \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_A, Y, \mathcal{H})$.

Demostración. Si $B \in \mathcal{H}$, entonces

$$f|_A^{-1}[B] = \{x \in A\colon\ f|_A(x) \in B\} = \{x \in A\colon\ f(x) \in B\} = A \cap f^{-1}[B] \in \mathcal{F}.$$

Definición de la integral sobre un conjunto medible

Definición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sea $A \in \mathcal{F}$.

$$\int_A^{(1)} f \, \mathrm{d}\mu := \int_A^{(1)} f|_A \, \mathrm{d}\mu_A.$$

Fórmula para la integral sobre un conjunto

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sea $A \in \mathcal{F}$.

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j}.$$

Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j \cap A).$$

Demostración

Es fácil ver que la familia $(P_j \cap A)_{j=1}^m$ es una partición generalizada de A, y

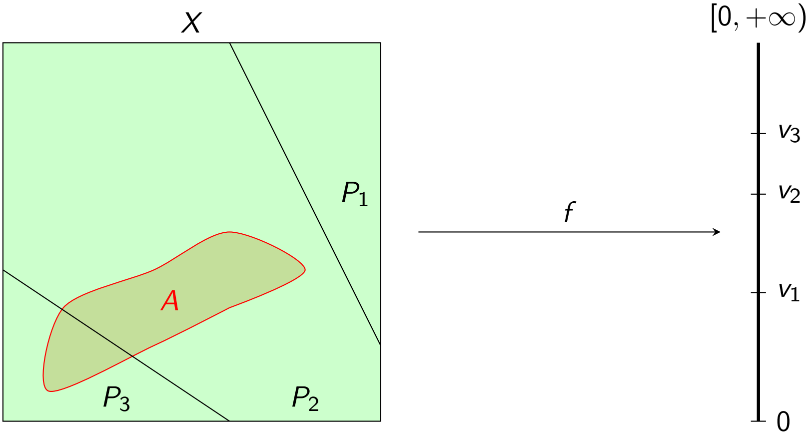
$$\forall x \in P_j \cap A \qquad f(x) = v_j.$$

Por lo tanto, $f|_A$ tiene la siguiente representación generalizada:

$$f|_A = \sum_{j=1}^m v_j \, \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

Luego

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \xlongequal{\text{def}} \int_A f|_A \, \mathrm{d}\mu_A = \sum_{j=1}^m v_j \mu|_A(P_j \cap A) = \sum_{j=1}^m v_j \; \mu(P_j \cap A).$$



$$\int_A f\,\mathrm{d}\mu = v_1\,\mu(A\cap P_1) + v_2\,\mu(A\cap P_2) + v_3\,\mu(A\cap P_3).$$

Otra fórmula para la integral sobre un conjunto

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica: $f = \sum_{j=1}^m v_j \, \mathbb{1}_{P_j}$.

Entonces

$$f \, \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \, \mathbb{1}_{P_j} \cdot \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \, \mathbb{1}_{P_j \cap A} = 0 \, \mathbb{1}_{X \setminus A} + \sum_{j=1}^m v_j \, \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

Demostración

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica: $f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j}$.
Entonces

$$f \, \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j} \cdot \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j \cap A} = 0 \, \mathbb{1}_{X \setminus A} + \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

La última expresión es una representación generalizada de $f \, \mathbb{1}_A$.

Demostración

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica: $f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j}$.
Entonces

$$f \, \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j} \cdot \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j \cap A} = 0 \, \mathbb{1}_{X \setminus A} + \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

La última expresión es una representación generalizada de $f \, \mathbb{1}_A$. Luego

$$\int_A f \, \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu =$$

Demostración

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica: $f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j}$.
Entonces

$$f \, \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j} \cdot \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j \cap A} = 0 \, \mathbb{1}_{X \setminus A} + \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

La última expresión es una representación generalizada de $f \, \mathbb{1}_A$. Luego

$$\int_A f \, \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu = 0 \, \mu(X \setminus A) + \sum_{j=1}^{m} v_j \mu(P_j \cap A) =$$

Demostración

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica: $f = \sum_{j=1}^m v_j \, \mathbb{1}_{P_j}$.
Entonces

$$f \, \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \, \mathbb{1}_{P_j} \cdot \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \, \mathbb{1}_{P_j \cap A} = 0 \, \mathbb{1}_{X \setminus A} + \sum_{j=1}^m v_j \, \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

La última expresión es una representación generalizada de $f \, \mathbb{1}_A$. Luego

$$\int_A f \, \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu = 0 \, \mu(X \setminus A) + \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j \cap A) = \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j \cap A) =$$

Demostración

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica: $f = \sum_{j=1}^m v_j \, \mathbb{1}_{P_j}$.
Entonces

$$f \, \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \, \mathbb{1}_{P_j} \cdot \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \, \mathbb{1}_{P_j \cap A} = 0 \, \mathbb{1}_{X \setminus A} + \sum_{j=1}^m v_j \, \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

La última expresión es una representación generalizada de $f \, \mathbb{1}_A$. Luego

$$\int_A f \, \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu = 0 \, \mu(X \setminus A) + \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j \cap A) = \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j \cap A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$